UNED

# Electromagnetismo II

Victoriano López Rodríguez
María del Mar Montoya Lirola
Manuel Pancorbo Castro

# *Electromagnetismo II*

VICTORIANO LÓPEZ RODRÍGUEZ
MARÍA DEL MAR MONTOYA LIROLA
MANUEL PANCORBO CASTRO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

*ELECTROMAGNETISMO II*

*Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos públicos.*

*© Universidad Nacional de Educación a Distancia*
*Madrid 2016*

*www.uned.es/publicaciones*

*© Victoriano López Rodríguez, María del Mar Montoya Lirola y Manuel Pancorbo Castro*

*ISBN electrónico: 978-84-362-7102-7*

*Edición digital actualizada: marzo de 2017*

# ÍNDICE GENERAL

PREFACIO

**Tema 1. CAMPO MAGNÉTICO EN MATERIALES**

Resumen

Objetivos generales

Objetivos específicos

Requisitos previos

Introducción

**1. Efecto Hall**

1.1. Modelo óhmico de conducción

1.2. Campo eléctrico transversal

1.3. Magnetorresistencia

**2. Desarrollo multipolar del potencial vector**

2.1. Término monopolar

2.2. Término dipolar

2.3. Corrientes filiformes

2.4. Dipolo magnético puntual

**3. Campo magnético de un dipolo**

**4. Dipolo en un campo magnético**

4.1. Par de fuerzas sobre un dipolo

4.2. Energía de un dipolo puntual

4.3. Fuerza sobre un dipolo puntual

**5. Imanación**

5.1. Vector imanación

5.2. Corriente de imanación

5.3. Campo magnético debido a la imanación

**6. Ecuaciones del campo en medios materiales**

6.1. Potencial escalar magnético

6.2. Intensidad de campo magnético

6.3. Teorema del flujo **B**

**7. Susceptibilidad y permeabilidad**

**8. Condiciones en los límites**

8.1. Medios homogéneos, lineales e isótropos

8.2. Medios materiales con imanación

**9. Materiales ferromagnéticos**

9.1. Curva de imanación

9.2. Circuitos magnéticos

9.3. Material magnético con entrehierro de aire

**10. Ejercicios propuestos**

**Tema 2. Inducción Electromagnética**

Resumen

Objetivos generales

Objetivos específicos

Requisitos previos

Introducción

**1. Ley de Faraday**

**2. Medios estacionarios**

2.1. Forma diferencial de la ley de Faraday

**3. Medios en movimiento**

3.1. Cambio de sistema de referencia

**4. Coeficientes de inducción**

4.1. Coeficiente de inducción mutua

4.2. Fórmula de Neumann

4.3. Coeficiente de autoinducción

4.4. Coeficiente de acoplamiento

4.5. Fuerza electromotriz inducida
4.6. Transformador
**5. Ejercicios propuestos**

**Tema 3. ENERGÍA MAGNÉTICA**
Resumen
Objetivos generales
Objetivos específicos
Requisitos previos
Introducción
**1. Energía magnética**
**2. Energía en función de B y H**
**3. Energía en medios no lineales**
**4. Coeficiente de autoinducción**
**5. Fuerza y par de fuerzas**
5.1. Sistemas o circuitos con corriente constante
5.2. Sistemas o circuitos con flujo constante
**6. Presión magnética**
**7. Ejercicios propuestos**

**Tema 4. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO**
Resumen
Objetivos genrales
Objetivos específicos
Requisitos previos
Introducción
**1. Corriente de desplazamiento**
**2. Ecuaciones de Maxwell-Lorentz**
2.1. Ecuaciones de Maxwell en materiales

**3. Principio de superposición**

3.1. Unicidad de las soluciones

**4. Condiciones de los límites**

4.1. Componentes normales

4.2. Componentes tangenciales

**5. Potenciales electrodinámicos**

5.1. Transformaciones de norma

5.2. Norma de Lorenz

5.3. Condiciones en los límites para los potenciales

**6. Teorema de Poynting**

6.1. Teorema de Poynting en forma compleja

**7. Ejercicios propuestos**

**Tema 5. Ondas Electromagnéticas: propagación libre**

Resumen

Objetivos generales

Objetivos específicos

Requisitos previos

Introducción

**1. Ecuación de ondas**

**2. Propagación de ondas planas en un medio sin pérdidas**

**3. Propagación de ondas planas en medios con pérdidas**

3.1. Propagación en dieléctricos con pérdidas pequeñas

**4. Polarización de una onda plana**

4.1. Polarización circular

4.2. Polarización lineal

**5. Paquete de ondas. Velocidad de grupo**

**6. Reflexión y transmisión de ondas planas: incidencia normal**

6.1. Balance de potencia

6.2. Incidencia normal sobre la superficie de un conductor perfecto

**7. Reflexión y transmisión de ondas planas: inidencia oblicua**

7.1. Polarización perpendicular

7.2. Polarización paralela

7.3. Relaciones de fase. Ángelo de Brewster

7.4. Reflectividad y transmisividad

**8. Ejercicios propuestos**

**Tema 6. PROPAGACIÓN GUIADA. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN**

Resumen

Objetivos generales

Objetivos específicos

Requisitos previos

Introducción

**1. Relaciones generales entre E y H**

**2. Modos de transmisión. Modo TEM**

**3. Líneas de transmisión**

**4. Propagación de ondas en una línea de transmisión**

4.1. Impedancia de una linea de transmisión

4.2. Coeficiente de reflexión

4.3. Líneas de transmisión sin pérdidas

**5. Caracterización de la onda estacionaria en una línea de transmisión**

5.1. Razón de onda estacionaria

5.2. Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas

**6. Potencia transmitida en una línea sin pérdidas**

**7. El diagrama de Smith**

7.1. Aplicaciones de la carta de Smith

**8. Acaptación de impedancias**

8.1. Acaptación de impedancias mediante un sintonizador simple

8.2. Acaptación de impedancias mediante un doble sintonizador

**9. Tratamiento de líneas con pérdidas**

**10. Ejercicios propuestos**

## Tema 7. Propagación guiada: Guías de ondas. Cavidades Resonantes

Resumen

Objetivos generales

Objetivos específicos

Requisitos previos

Introducción

**1. Modos de transmisión TE y TM**

1.1. Modo Transversal Eléctrico TE

1.2. Modo Transversal Magnético TM

1.3. Relación de dispersión. Diagrama $\omega - \beta$ para los modos de transmisión

**2. Guia de ondas rectangular**

2.1. Análisis del modo fundamental

**3. Guía de sección circular**

3.1 Modo fundamental en una guía cilíndrica

**4. Potencia en guías. Atenuación**

4.1. Cálculo de la atenuación en guías

**5. Cavidades resonantes**

5.1. Factor de calidad

**6. Ejercicios propuestos**

## Tema 8. Radiación Electromagnética

Resumen

Objetivos generales

Objetivos específicos

Requisitos previos

Introducción

**1. Potenciales retardados**

**2. Radiación de un dipolo corto**

2.1. Campos de un dipolo oscilante

2.2. Potencia radiada por un dipolo corto

**3. Antenas**

3.1. Antena lineal

3.2. Antena de cuadro

3.3. Antenas situadas frente a tierra

**4. Agrupaciones de antenas lineales**

4.1. Principio de multiplicación de diagramas. Factor de agrupación

4.2. Agrupación vertical de dipolos

4.3. Agrupación horizontal de dipolos

4.4. Análisis del diagrama de radiación de una agrupación

4.5. Propiedades directivas de agrupaciones uniformes

**5. Ejercicios propuestos**

Apéndice A. **TEOREMA DE RECIPROCIDAD**

Apéndice B. **RELACIONES MATEMÁTICAS I**

Apéndice C. **RELACIONES MATEMÁTICAS II**

Apéndice D. **TABLAS**

**BIBLIOGRAFÍA**

***Aquí*** podrá encontrar información adicional y actualizada de esta publicación

# PREFACIO

En este libro se abordan las cuestiones relacionadas con el campo electromagnético que forman parte del programa de la asignatura *Electromagnetismo II* del Grado en Física que se imparte en la UNED a fecha de hoy.

Esta obra tiene su génesis en las Unidades Didácticas de la asignatura *Electricidad y Magnetismo*, de la Licenciatura en CC. Físicas de la UNED, tituladas *Electromagnetismo*, del Prof. Victoriano López Rodríguez.

Hemos adoptado la misma notación y los mismos puntos de partida que la obra que antecede a esta publicación, *Electromagnetismo I* [1], también del Prof. V. López, a la cual este libro pretende dar continuidad; es una segunda parte necesaria para abordar la materia del Electromagnetismo de segundo curso del Grado en Física en la UNED de forma completa y autocontenida. Por tanto, todas las cuestiones que no sean explicadas ni evidentes por sí mismas deben buscarse en la obra anterior.

A lo largo del texto se proponen una serie de ejercicios de autoevaluación con sus soluciones que ejemplifican el contenido teórico explicado en la sección correspondiente. Recomendamos a los estudiantes que intenten realizar por ellos mismos estos ejercicios antes de ver la solución.

Esperamos que este libro, con sus ejercicios de autoevaluación, problemas propuestos, figuras, resúmenes, etc. sea una herramienta útil al estudiante que le permita entender sin trabas los conceptos relacionados con el campo electromagnético.

Por último queremos agradecer al Prof. Carlos Fernández González por su ayuda en la confección de algunas figuras.

Tema 1

# CAMPO MAGNÉTICO EN MATERIALES

## RESUMEN

### Objetivos generales

Estudiar el comportamiento del campo magnético cuando existen medios materiales e introducir los vectores de campo y parámetros que caracterizan los citados medios.

### Objetivos específicos

- Efecto Hall y magnetorresistencia.
- Potencial vector magnético debido a una distribución de corriente: Desarrollo multipolar.
- Términos monopolar y dipolar del potencial vector magnético.
- Momento dipolar magnético de una distribución de corriente y de un circuito filiforme.
- Campo magnético debido a un dipolo magnético.
- Par de fuerzas sobre un dipolo magnético.
- Energía de un dipolo en el seno de un campo magnético uniforme.
- Fuerza sobre un dipolo magnético en un campo no uniforme.
- Origen de los dipolos magnéticos en un material. Definición del vector imanación $\mathbf{M}$.
- Corrientes de imanación.
- Campo magnético debido a un material imanado.

- Potencial escalar magnético.
- Teorema de Ampère cuando intervienen medios imanados. Definición del vector intensidad de campo magnético **H**.
- Relación entre los vectores **B**, **H** y **M**.
- Teorema del flujo de **B** a través de una superficie cerrada cuando intervienen medios imanados: Fuentes de la intensidad de campo magnético **H**.
- Definición de susceptibilidad y permeabilidad magnética. Distinción entre medios lineales y no lineales.
- Tipos de materiales magnéticos y su caracterización mediante la susceptibilidad o permeabilidad. Medios diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos.
- Curva de primera imanación en medios ferromagnéticos.
- Ciclo de histéresis de materiales ferromagnéticos: Conceptos de campo coercitivo y remanencia.
- Condiciones en los límites para los vectores **B**, **H** y **M** en la frontera de dos medios materiales.

### Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético, potencial vector magnético, densidad de corriente eléctrica, Ley de Ohm, fuerza de Lorentz, dipolo eléctrico y dieléctrico. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial.

## INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a estudiar la interacción de un campo magnético con los materiales.

En primer lugar, vamos a describir el *efecto Hall*, que es la aparición de un campo eléctrico transversal en un medio conductor sometido a un campo magnético y por el que, además, circula una corriente. Asociado a este efecto, y también a la geometría del conductor, tenemos el fenómeno de la *magnetorresistencia* como un incremento de la resistividad natural del medio en presencia de un campo magnético.

Por otro lado, al igual que en el caso electrostático se define el momento dipolar eléctrico (y sus correspondientes momentos multipolares), la polarización y su relación con el campo eléctrico a través del vector desplazamiento, en este tema veremos los momentos multipolares magnéticos, la magnetización de los materiales y su relación con el campo magnético. En este sentido, la interacción del campo magnético y la materia tiene notables coincidencias con el caso electrostático.

Para ello, primero veremos que el potencial vector magnético debido a una distribución de corrientes se puede expresar en función de sus momentos multipolares y que el principal componente en este caso es el momento dipolar.

Posteriormente veremos que un medio material, desde el punto de vista magnético, se puede considerar como un agregado de átomos y moléculas en los que un campo magnético externo induce un momento magnético. Además, en materiales como los paramagnéticos y ferromagnéticos el campo exterior orienta los dipolos magnéticos intrínsecos que poseen. Por otra parte el diamagnetismo tiene su origen en las corrientes atómicas y el paramagnetismo se debe a la orientación de los momentos magnéticos intrínsecos de átomos y moléculas en la dirección del campo aplicado. Los materiales ferromagnéticos se caracterizan porque la interacción de los átomos próximos provoca la alineación de sus momentos dipolares en una dirección; el conjunto de dipolos alineados se agrupan en dominios, zonas del material con los dipolos orientados en una dirección. Un campo externo provoca que los dominios se orienten en la dirección del campo aplicado.

Desde un punto de vista macroscópico un material magnético se caracteriza por su imanación, que se define como el momento magnético por unidad de volumen.

# 1. EFECTO HALL

## 1.1. Modelo óhmico de conducción

En el modelo más simple de conducción, la corriente eléctrica no es más que el desplazamiento de cargas libres en un medio bajo la acción combinada de un campo eléctrico externo y el efecto de frenado que producen las colisiones de estas cargas con las partículas materiales que componen el medio. El resultado es que, al igual que un objeto material sometido a una fuerza constante que se desplaza en un fluido, un portador de carga sometido a un campo eléctrico externo en un medio alcanza una velocidad límite promedio que viene dada por:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \nu \mathbf{E} \tag{1.1}$$

donde $\nu$ es un parámetro llamado *movilidad*[1] que depende del detalle de la interacción de ese portador concreto con el medio. En un conductor con varias especies actuando como portadoras de carga libre, cada una tiene una movilidad en principio distinta a la de los demás. Adviértase que en esta ecuación $\nu$ lleva implícito el signo del portador, es decir, si éste es negativo, $\nu$ es negativo. Por tanto $\langle \mathbf{v} \rangle$ toma el sentido que se espera según la carga del portador.

La densidad de corriente se define como $\mathbf{J} = nq \langle \mathbf{v} \rangle = \rho \langle \mathbf{v} \rangle$, donde $n$ es la densidad de portadores, $q$ su carga y $\rho = nq$ la densidad de carga libre disponible para la conducción. Entonces:

$$\mathbf{J} = \rho \nu \mathbf{E} \tag{1.2}$$

Obsérvese que la densidad de corriente, $\mathbf{J}$, y el campo eléctrico **tienen la misma dirección y sentido** independientemente del signo del portador considerado, puesto que tanto $\rho$ como $\nu$ toman el signo del portador[2] y su producto es siempre positivo.

En el caso de que en el medio haya varias especies portadoras, cada una contribuirá con su propia densidad de carga y movilidad y entonces la densidad

---

[1] Véase ecuación (10.16) de [1]; hemos cambiado la notación de la movilidad de $\mu$ a $\nu$ para evitar confusiones con la permeabilidad magnética, concepto que aparece en la sección 7.

[2] En otras especialidades, como por ejemplo la Electrónica, y también en otros textos la movilidad se toma siempre positiva, prescindiendo de la ecuación 1.1 y expresando 1.2 en términos de densidad de portadores en lugar de $\rho$. Para los propósitos de esta sección consideramos que es más claro asignarle a la movilidad el signo que le corresponde al portador.

de corriente será la suma de todas las contribuciones:

$$\mathbf{J} = \left( \sum_i \rho_i \nu_i \right) \mathbf{E} \tag{1.3}$$

El factor $\sum_i \rho_i \nu_i$ no es más que la conductividad, $\gamma$. Así pues, la ecuación anterior la podemos poner como:

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \tag{1.4}$$

que es la forma puntual de la ley de Ohm.

## 1.2. Campo eléctrico transversal

Supongamos que en un conductor se mantiene una corriente que es debida a un solo tipo de portador, como por ejemplo la corriente electrónica en un metal (ver figura 1.1), y que ese conductor está en el seno de un campo magnético. Entonces, sobre las cargas que se desplazan se ejerce la fuerza de Lorentz magnética, $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$; esta fuerza es perpendicular a la trayectoria de la carga en el interior del conductor, con lo que las cargas tienden a desviarse, generando un exceso de carga en la pared externa del conductor, y un defecto de carga en la pared opuesta (recordemos que el conductor es neutro). Este desequilibrio de carga produce un **campo eléctrico transversal** ($E_t$) a la corriente; el proceso de acumulación de carga se detiene cuando la fuerza eléctrica compensa la fuerza magnética:

$$0 = q\,\mathbf{E}_t + q\,\langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}_t = -\langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} \tag{1.5}$$

Expresamos la ecuación (1.5) en función de la densidad corriente ($\mathbf{J} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle$, suponiendo un solo portador):

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho} \tag{1.6}$$

Obsérvese que el campo transversal por el efecto Hall depende del signo del portador (a través del signo de la densidad de carga portadora $\rho$). Por tanto portadores de distinto signo producen campos Hall de **sentidos opuestos** que tienden a compensarse. El efecto Hall se da en corrientes de conducción producidas por portadores que sean todos del mismo signo. De hecho, para determinar qué

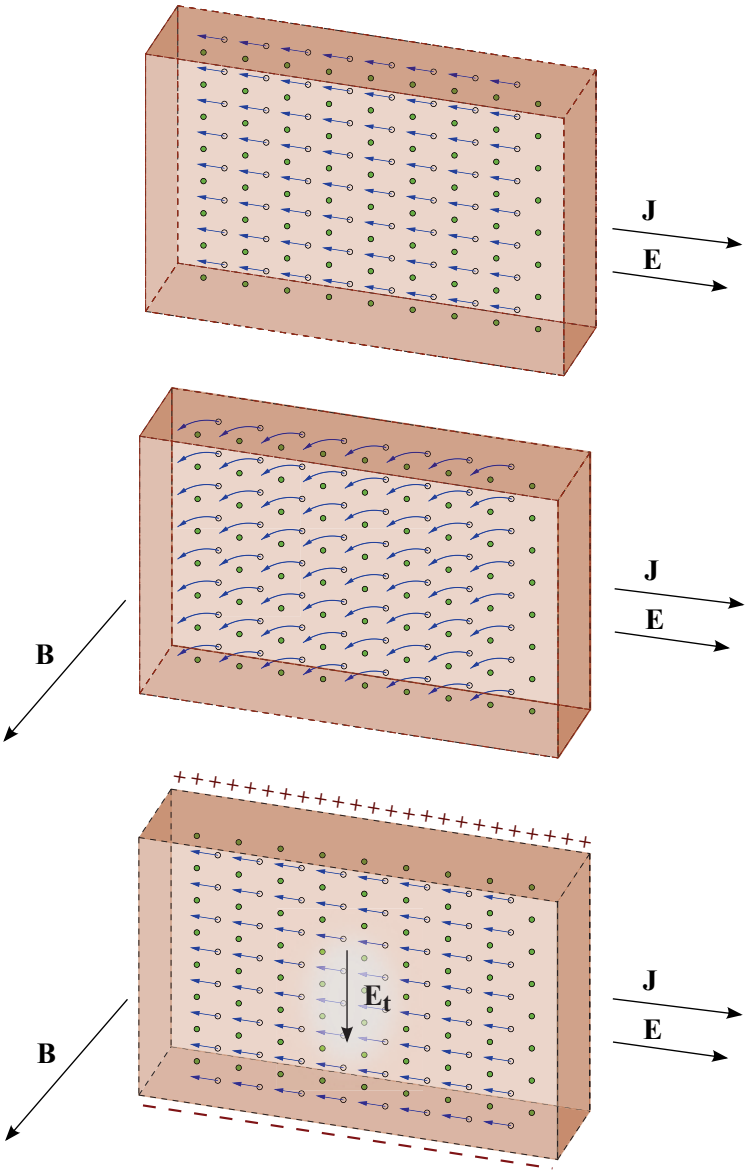



Figura 1.1. Manifestación del efecto Hall en un metal. Los electrones son los puntos que llevan asociado el vector velocidad (obsérvese que es opuesto a **J**). Los otros puntos representan los iones positivos de la red.

tipo de portadores conducen la corriente en un medio desconocido, se establece una corriente y un campo magnético perpendicular y se mide la diferencia de potencial en sentido transversal a la corriente, en un plano perpendicular al campo aplicado. El signo de esta diferencia de potencial establece cuál es el signo de la carga del portador mayoritario del medio. Es el método que se usa, por ejemplo, en la determinación del portador dominante en un semiconductor (positivo en los semiconductores tipo-$p$ y negativo en los tipo-$n$).

Matemáticamente, la expresión (1.5) se generaliza de la siguiente forma cuando hay dos tipos de portadores (positivos y negativos):

$$\mathbf{E}_t = -\left(\left\langle \mathbf{v}^+ \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}^- \right\rangle\right) \times \mathbf{B} \tag{1.7}$$

cuando se establece una corriente de conducción cada portador se mueve en sentidos opuestos; si sus movilidades son parecidas en términos absolutos, entonces $\langle \mathbf{v}^+ \rangle \simeq -\langle \mathbf{v}^- \rangle$ y por tanto $\mathbf{E}_t \simeq 0$, como habíamos dicho antes.

Se define el *coeficiente Hall*, $R_H$ con la siguiente expresión:

$$R_H = \frac{E_t}{JB} \tag{1.8}$$

donde queda sobreentendido que $J$ y $B$ son perpendiculares y $E_t$ se mide en la dirección perpendicular a ambos; en el caso de un único portador toma el valor

$$R_H = -\frac{1}{\rho}$$

como se comprueba fácilmente con la ecuación (1.6); es decir, el coeficiente Hall es la inversa de la densidad de carga libre de ese portador cambiada de signo.

Pero también se puede producir una situación en que el medio tenga portadores de ambos signos que son arrastrados **en el mismo sentido**. Una situación típica es el flujo de una disolución iónica en una tubería (como por ejemplo, la sangre en los vasos sanguíneos). En este caso $\langle \mathbf{v}^+ \rangle = \langle \mathbf{v}^- \rangle$ y por tanto la **corriente total es nula**. Pero, aún siendo la corriente total nula, **se puede dar efecto Hall**, como se puede ver en la expresión anterior (1.7). Todas las situaciones descritas se reflejan en la figura 1.2: en la izquierda tenemos el caso de un conductor metálico, donde sólo se desplazan los portadores de carga negativos (electrones); esta situación se corresponde a la reflejada en la figura 1.1; en el centro, se representa una corriente de conducción con portadores de distinto signo implicados; a la derecha, el flujo de un fluido con cargas móviles, que se mueve por arrastre mecánico. Todas las situaciones se dan en el seno de un campo magnético perpendicular al plano del papel, cuyas líneas están representadas por el símbolo $\otimes$.

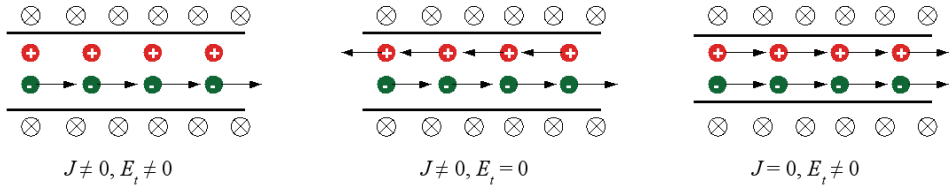



Figura 1.2. Efecto Hall en tres tipos de arrastre de cargas.

## Ejercicio de autoevaluación 1.1

Encontrar la expresión de $R_H$ para una disolución iónica con una única especie monovalente que se disocia en un portador positivo y otro negativo, de movilidades respectivas $\nu^+$ y $\nu^-$. La concentración del soluto es $n$.

## Solución

Las densidades de carga de cada especie vienen dadas por

$$\begin{aligned} \rho^+ &= +en \\ \rho^- &= -en \end{aligned}$$

La densidad de corriente en un medio de este tipo, con dos portadores de distinto signo, es:

$$\mathbf{J} = \rho^+ \left\langle \mathbf{v}^+ \right\rangle + \rho^- \left\langle \mathbf{v}^- \right\rangle = en \left( \left\langle \mathbf{v}^+ \right\rangle - \left\langle \mathbf{v}^- \right\rangle \right)$$

Sustituimos la expresión anterior y la ecuación (1.7) en la definición del coeficiente Hall (1.8); asumimos que los campos implicados son perpendiculares entre sí y eliminamos el carácter vectorial, pero conservando implícitamente los signos en las magnitudes que evidencian el sentido de los campos originales:

$$R_H = \frac{-\left( \langle v^+ \rangle + \langle v^- \rangle \right) B}{en \left( \langle v^+ \rangle - \langle v^- \rangle \right) B} = -\frac{\langle v^+ \rangle + \langle v^- \rangle}{en \left( \langle v^+ \rangle - \langle v^- \rangle \right)}$$

Puesto que estamos en un medio óhmico, las velocidades promedio de cada portador son proporcionales al campo electromotriz según la expresión (1.1); sustituyendo y simplificando:

$$R_H = -\frac{1}{en}\,\frac{\nu^+ + \nu^-}{\nu^+ - \nu^-}$$

Hay que recordar que las movilidades tienen el mismo signo que la carga de su portador; por tanto, $\nu^+ > 0$ y $\nu^- < 0$.

## 1.3. Magnetorresistencia

Ya hemos visto que la presencia de un campo magnético desvía parte de la carga que fluye en forma de corriente eléctrica. Es de esperar que este desvío de cargas tenga su repercusión en la facilidad con que la carga es transportada por el campo electromotriz. Efectivamente, los conductores en el seno de un campo magnético experimentan una disminución de su conductividad efectiva y este fenómeno se conoce por el nombre de *magnetorresistencia*.

Vamos a estudiar el proceso considerando inicialmente un único portador. Aplicamos la ecuación (1.1) pero considerando ahora que el campo electromotiz tiene la componente magnética dada por la fuerza de Lorentz, $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}$. Sustituyendo en (1.1):

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \nu \left( \mathbf{E} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} \right)$$

que nos da una ecuación en $\langle \mathbf{v} \rangle$. Vamos a resolverla en términos de la densidad de corriente, que viene dada por $\mathbf{J} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle$ y donde la conductividad parcial del portador es $\gamma = \rho\nu$:

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} + \nu\, \mathbf{J} \times \mathbf{B} \tag{1.9}$$

Para despejar $\mathbf{J}$ de la ecuación (1.9) tenemos que hacer algunas manipulaciones algebraicas. Empezamos multiplicando ambos miembros de la ecuación vectorialmente por $\mathbf{B}$, por la derecha:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nu \left( \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} \tag{1.10}$$

El doble producto vectorial de la parte derecha lo resolvemos con la ayuda de la fórmula (C.11) del apéndice C:

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{J}(B^2) + \mathbf{B}\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{J})$$

Ahora, en la densidad de corriente que aparece en el paréntesis de la derecha sustituimos la propia expresión 1.9 y nos aprovechamos del hecho que el producto $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$ es nulo:

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2 \mathbf{J} + \gamma \, \mathbf{B} \, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})$$

por lo que (1.10) queda:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \nu \, B^2 \mathbf{J} + \nu\gamma \, \mathbf{B} \, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})$$

Volvemos a aplicar (1.9) para quitar el término $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{J} - \gamma \mathbf{E} = \nu\gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \nu^2 B^2 \mathbf{J} + \nu^2 \gamma \, \mathbf{B} \, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})$$

reorganizando los términos despejamos finalmente $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \frac{\gamma}{1 + \nu^2 B^2} \left( \mathbf{E} + \nu \, \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nu^2 \, \mathbf{B} \, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) \right) \tag{1.11}$$

La ecuación anterior nos da la densidad de corriente total, tanto en la componente paralela al campo electromotriz original como en otras direcciones. Vemos que incluso la componente paralela al campo, que correspondería al primer término de la derecha de (1.11), está afectada por una conductividad efectiva:

$$\gamma_{\text{ef}} = \gamma \left( 1 + \nu^2 B^2 \right)^{-1}$$

que es inferior a la conductividad original, justamente por la intervención del campo magnético.

En realidad, esta conductividad efectiva depende de la dirección que adopte el campo magnético. Si éste es paralelo a $\mathbf{E}$, entonces $\mathbf{B} \, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) = B^2 \, \mathbf{E}$ y la ecuación (1.11) queda:

$$\mathbf{J} = \frac{\gamma}{1 + \nu^2 B^2} \left( \mathbf{E} + 0 + \nu^2 B^2 \, \mathbf{E} \right) = \gamma \mathbf{E}$$

y recuperamos la ley de Ohm original, sin ningún tipo de modificación de la conductividad por influencia del campo magnético externo. Es decir *los campos magnéticos paralelos al campo electromotriz no producen efecto Hall ni magnetorresistencia.*

La ecuación (1.11) se puede generalizar a varios portadores de corriente, cada uno con su conductividad y movilidad parcial $\gamma_i$, $\nu_i$

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} \left( \mathbf{E} + \nu_i \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nu_i^2 \mathbf{B} \, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) \right) \tag{1.12}$$

***Disipación de potencia***

Como ya sabemos, la densidad potencia disipada en un medio resistivo es:

$$P = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

Aplicando esta relación a la ecuación (1.12):

$$P = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} \left( E^2 + \nu_i^2 \left( \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \right)^2 \right) \tag{1.13}$$

Como siempre es útil analizar los casos extremos:

**B y E paralelos** Entonces:

$$P = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} \left( E^2 + \nu_i^2 B^2 E^2 \right) = \sum_i \gamma_i E^2 = \gamma E^2$$

que es la ley de Joule habitual en un conductor en ausencia de campo magnético.

**B y E perpendiculares**

$$P = \sum_i \frac{\gamma_i}{1 + \nu_i^2 B^2} E^2 = \gamma_{\text{ef}} E^2$$

donde $\gamma_{\text{ef}} < \gamma$ y el conductor disipa menos potencia por efecto de la magnetorresistencia.

## 2. DESARROLLO MULTIPOLAR DEL POTENCIAL VECTOR

Analizamos ahora el potencial vector magnético originado por una distribución de corriente limitada a un volumen próximo al origen del sistema de coordenadas que tomamos de referencia. El potencial se calcula a partir de la ecuación (1.14) que lo define en función de la densidad de corriente. La figura 1.3 muestra la situación de la distribución de corriente y el punto donde se calcula el potencial. Supondremos que el punto donde se calcula está muy alejado de la zona donde se ubica la corriente, de manera que la distancia entre puntos donde se sitúa la corriente es despreciable frente a la distancia a dicho punto; es decir, suponemos que $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$.

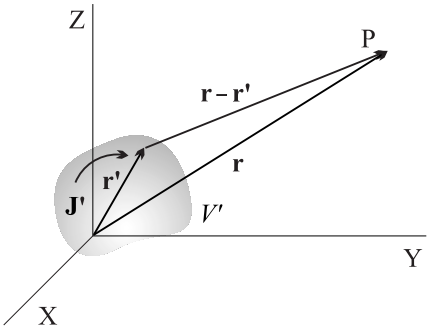



Figura 1.3

La ecuación de partida es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \tag{1.14}$$

En la relación anterior se mezclan coordenadas con y sin prima. Interesa desarrollar la ecuación anterior en función de términos multipolares, y de forma que en cada término sea el producto de dos elementos uno en el que sólo figura la variable con prima y en el otro la variable $\mathbf{r}$.

Con la condición $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$, podemos desarrollar en serie $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ y tomar los dos primeros términos,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2+r'^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{1/2}} \simeq \frac{1}{(r^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{1/2}} = \frac{1}{r\,(1-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r^2)^{1/2}}$$

Si ponemos $x = 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r^2$, desarrollamos el binomio $(1-x)^{-1/2}$ y tomamos los dos primeros términos, tenemos que,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \cdots$$

de modo que,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r}\int_{V'}\mathbf{J}(\mathbf{r}')dv' + \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int_{V'}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}')dv' + \cdots \tag{1.15}$$

El primer término de la ecuación anterior se conoce como **término monopolar** y el segundo es el **término dipolar**. Como veremos a continuación el

desarrollo en términos multipolares es más complejo que en electrostática. El término dipolar es el que predomina en medios magnéticos, por esta razón sólo vamos a estudiar los dos términos indicados. Dada la complejidad de cálculo y su menor influencia en los fenómenos observados en medios magnéticos no analizaremos el momento cuadripolar.

Para el análisis de los citados términos, vamos a demostrar el comportamiento de dos relaciones muy útiles. La primera es el producto de una función escalar por el vector densidad de corriente $f(\mathbf{r}')\,\mathbf{J}$, donde $f(\mathbf{r}')$ es una función escalar, que depende de las coordenadas donde se sitúa la distribución de corriente. Considerando el volumen $V'$ donde se sitúa la corriente y la superficie $S'$ que encierra por completo la distribución de corriente, se puede comprobar que se verifica:

$$\int_{V'} \nabla' \cdot (f(\mathbf{r}')\,\mathbf{J}) dv' = \oint_{S'} (f(\mathbf{r}')\,\mathbf{J}) \cdot d\mathbf{s}' = 0 \tag{1.16}$$

Se anula la integral de superficie porque sobre $S'$ el flujo de la corriente es nulo ya que, por construcción, $S'$ engloba toda la corriente.

Dado que $\nabla'$ actúa sobre las coordenadas de $\mathbf{r}'$, y considerando que se trata de corrientes estacionarias donde $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, la siguiente relación vectorial será,

$$\nabla \cdot (f(\mathbf{r}')\,\mathbf{J}) = \big(\nabla f(\mathbf{r}')\big) \cdot \mathbf{J} + f(\mathbf{r}')\nabla \cdot \mathbf{J} = \big(\nabla f(\mathbf{r}')\big) \cdot \mathbf{J}$$

Llevando este resultado a la ecuación (1.16) queda,

$$\int_{V'} \big(\nabla f(\mathbf{r}')\big) \cdot \mathbf{J} dv' = 0 \tag{1.17}$$

## 2.1. Término monopolar

Vamos a utilizar las ecuaciones (1.16) y (1.17) para analizar el comportamiento de los términos de la ecuación (1.15).

Si suponemos que $f(\mathbf{r}') = x'$

$$\nabla f(\mathbf{r}') = \mathbf{u}_x \quad \text{y} \quad \big(\nabla f(\mathbf{r}')\big) \cdot \mathbf{J} = J_x$$

Llevando este resultado a la ecuación (1.17) tendremos,

$$\int_{V'} \big(\nabla f(\mathbf{r}')\big) \cdot \mathbf{J} dv' = \int_{V'} J_x dv' = 0$$

Lo mismo ocurrirá si hacemos $f(\mathbf{r}') = y'$, y $f(\mathbf{r}') = z'$,

$$\int_{V'} J_y dv' = 0 \quad ; \quad \int_{V'} J_z dv' = 0$$

Podemos expresar las relaciones anteriores de forma genérica como sigue: $f(\mathbf{r}') = x'_i$, donde ($x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$ y $x'_3 = z'$). $\nabla f(\mathbf{r}') = \nabla x'_i = \mathbf{u}_i$. $J_1$ representará a $J_x$, $J_2$ a $J_y$ y $J_3$ a $J_z$. Con esta notación,

$$\int_{V'} J_i dv' = 0$$

De las relaciones anteriores se deriva que,

$$\int_{V'} \mathbf{J} dv' = \mathbf{u}_x \int_{V'} J_x dv' + \mathbf{u}_y \int_{V'} J_y dv' + \mathbf{u}_z \int_{V'} J_z dv' = 0$$

Es decir,

$$\int_{V'} \mathbf{J} dv' = 0 \tag{1.18}$$

Con esto se demuestra que *el* **término monopolar** *en el desarrollo de potencial vector debido a una distribución de corrientes es nulo.* Si recordamos que el primer término en caso de electrostática es la suma de todas las cargas eléctricas, que dicho término monopolar para corrientes sea nulo es una consecuencia del teorema de la divergencia, es decir, que en magnetismo no hay monopolos o cargas magnéticas.

## 2.2. Término dipolar

Ahora vamos a trasformar el segundo término de la ecuación (1.15) para separar los elementos que dependen de las coordenadas con prima de los que no la tienen. Si desarrollamos el producto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_{V'} (x\, x' + y\, y' + z\, z') \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'$$

Si ponemos la expresión en función de $x_j\, x'_j$, con $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$ y $x'_3 = z'$, y teniendo en cuenta que la integración se hace sobre las

variables con prima, la ecuación anterior se puede expresar de la siguiente manera,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\sum_{j=1}^{3} x_j \int_{V'} x'_j \mathbf{J}(\mathbf{r}')dv'$$

La componente $i$ del vector $\mathbf{A}_D$ será,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\sum_{j=1}^{3} x_j \int_{V'} x'_j J_i dv'$$

Para trasformar esta ecuación sumamos y restamos términos $x'_i J_j$ dentro del integrado de la forma siguiente,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\sum_{j=1}^{3} x_j \int_{V'} \left(\frac{1}{2}(x'_j J_i + x'_i J_j) + \frac{1}{2}(x'_j J_i - x'_i J_j)\right) dv'$$

Vamos a demostrar que el primer término dentro de la integral es nulo. Para ello utilizamos la relación (1.17), pero ahora ponemos $f = x'\,y'$,

$$\nabla f = y'\,\mathbf{u}_x + x'\,\mathbf{u}_y$$

De forma genérica, si $f = x'_i x'_j$,

$$\nabla f \;=\; x'_j \mathbf{u}_i + x'_i \mathbf{u}_j$$

Llevando esta relación a la ecuación (1.17),

$$\int_{V'} (\,x'_j \mathbf{u}_i + x'_i \mathbf{u}_j)\cdot \mathbf{J} dv' = \int_{V'} (\,x'_j J_i + x'_i J_j) dv' = 0$$

Con este resultado el primer término del segundo miembro de $A_D(\mathbf{r})_i$ se anula y por tanto,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\sum_{j=1}^{3} x_j \int_{V'} \frac{1}{2}(x'_j J_i - x'_i J_j) dv'$$

En forma vectorial,

$$\sum_{j=1}^{3} x_j (x'_j J_i - x'_i J_j) = [\mathbf{J}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{J}\cdot\mathbf{r})]_i$$

Teniendo en cuenta la relación vectorial (C.11),

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r} = \mathbf{J}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r})$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j (x'_j J_i - x'_i J_j) = [(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}]_i$$

Con esta igualdad,

$$A_D(\mathbf{r})_i = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int_{V'} [(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}]_i dv'$$

Todas las componentes son similares, por tanto,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int_{V'} \frac{1}{2} \left( (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r} \right) \, dv' \tag{1.19}$$

En la ecuación anterior podemos agrupar los términos que dependen de las coordenadas con prima de la siguiente manera,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) dv' \tag{1.20}$$

La ecuación (1.20) define el **momento dipolar magnético** debido a una distribución arbitraria de corriente.

El término dipolarqueda definido por la siguiente ecuación,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{1.21}$$

Vemos que el término dipolar del potencial vector magnético es perpendicular al momento dipolar magnético y al vector que indica la posición donde se considera el potencial.

### *Cambio de origen*

Vamos a ver que si cambiamos el origen del sistema de coordenadas no cambia el momento dipolar. Suponemos que el origen del sistema de referencia cambia a un punto $O_o$, de manera que $\overrightarrow{OO_o} = \mathbf{a}$, y los nuevos vectores de posición que

indican dónde se toman los elementos de corriente se relacionan con los anteriores mediante la siguiente ecuación,

$$\mathbf{r}'_o = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$$

Sustituyendo en la ecuación (1.20),

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_o &= \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{r}'_o \times \mathbf{J} dv' = \frac{1}{2}\int_{V'} (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times \mathbf{J}\, dv' \\ &= \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}\, dv' - \frac{1}{2}\mathbf{a} \times \int_{V'} \mathbf{J}\, dv'\end{aligned}$$

Pero como vimos en el apartado anterior dedicado al término monopolar,

$$\int_{V'} \mathbf{J}\, dv' = 0$$

Por tanto,

$$\mathbf{m}_o = \mathbf{m}$$

El momento dipolar magnético debido a una distribución de corriente *no depende del origen de coordenadas elegido*, por tanto es un elemento que caracteriza la distribución y se puede calcular eligiendo el sistema de coordenadas más apropiado a la distribución de corriente que consideremos.

## 2.3. Corrientes filiformes

Cuando se trata de un circuito cerrado por el que circula una corriente $I$, la forma que adopta la expresión (1.20) cambia. Se sustituye $\mathbf{J}dv'$ por $Id\mathbf{l}'$ y la integral de volumen se convierte en una integral sobre el camino cerrado que coincide con el hilo que soporta la corriente. El momento dipolar queda de la forma siguiente,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' \tag{1.22}$$

### *Circuito plano*

En el caso de un circuito filiforme situado sobre el plano XY como muestra la figura 1.4(a), la relación (1.22) se puede simplificar teniendo en cuenta el área

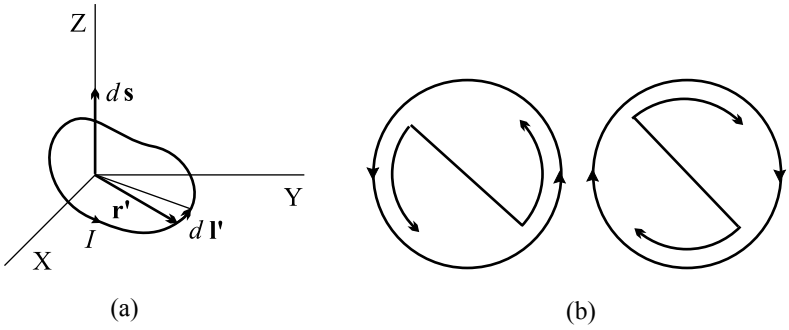



Figura 1.4

elemental dentro de la espira. Dicha área es,

$$\frac{1}{2}\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = d\mathbf{s}' = \mathbf{n}\, ds'$$

La integral sobre todo el contorno $C'$ será el área de la espira,

$$\frac{1}{2}\oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = \mathbf{n}\, S$$

En un circuito plano su momento dipolar magnético es,

$$\mathbf{m} = I\, S\, \mathbf{n} \tag{1.23}$$

El momento dipolar magnético tiene dimensiones de intensidad de corriente por superficie, [A·m$^2$] en el SI.

La orientación del momento está relacionada con el sentido de recorrido del circuito y obedece a la regla del tornillo. En la figura 1.4(b) se muestran dos espiras con sentidos de corriente opuesto; en la primera el vector $\mathbf{n}$ sale del plano hacia el observador y en la segunda entra en el plano. Se han dibujado una N y una S con los sentidos de corriente para indicar de forma esquemática que una espira produce un momento similar al observado en el polo norte de una barra imanada y la otra corresponde al polo sur. Si miramos la primera espira de frente vemos el polo norte y si lo hacemos por la cara opuesta, vista desde la otra cara del papel, se observará el polo sur.

### 2.4. Dipolo magnético puntual

El dipolo magnético puntual es una abstracción que consiste en una partícula puntual que porta un cierto momento dipolar magnético $\mathbf{m}$. Se puede visualizar como un circuito plano donde $S \to 0$ y a la vez $I \to \infty$ mientras que su producto es constante, $m = IS$.

## 3. CAMPO MAGNÉTICO DE UN DIPOLO

Es interesante conocer la forma que adoptan las líneas de campo en el caso de un dipolo magnético puntual situado en el origen de coordenadas. El potencial vector magnético que corresponde a este dipolo ideal viene dado por la ecuación (1.21). Calculamos el campo magnético en un punto definido por el vector de posición $\mathbf{r}$, aplicando la relación entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

En primer lugar aplicamos la relación vectorial (C.42),

$$\nabla \times (\phi\, \mathbf{G}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{G} + \phi \nabla \times \mathbf{G}$$

En este caso $\phi = 1/r^3$ y $\mathbf{G} = \mathbf{m} \times \mathbf{r}$.

$$\nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) = \mathbf{u}_r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3r^2}{r^6} \mathbf{u}_r = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

Por tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( -\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right)$$

Aplicando la relación del producto vectorial doble,

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) = r^2\, \mathbf{m} - \mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})$$

$$-\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \frac{3}{r^5} (\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2\, \mathbf{m})$$

El rotacional del producto vectorial es,

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = \mathbf{m}\, \nabla \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r}\, \nabla \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r}$$

El operador $\nabla$ ahora representa derivar con respecto a las coordenadas del punto donde se calcula el campo, es decir, las indicadas por $\mathbf{r}$. El momento $\mathbf{m}$ es constante. Teniendo esto en cuenta,

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{m} = 0 \quad ; \quad (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{m} = 0$$

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \left( \mathbf{m} \cdot (\mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}) \right) r\, \mathbf{u}_r$$

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} r\, \mathbf{u}_r + \mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} r\, \mathbf{u}_r + \mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} r\, \mathbf{u}_r$$

Como,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} = \mathbf{u}_\theta \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{u}_\varphi \operatorname{sen} \theta$$

Desarrollando la derivada del producto $r\mathbf{u}_r$, la relación anterior se trasforma en,

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_r + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\theta)\mathbf{u}_\theta + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_\varphi)\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{m}$$

ya que los productos escalares son las proyecciones de $\mathbf{m}$ sobre los respectivos ejes de coordenadas; es decir, las componentes de $\mathbf{m}$.

De todo lo anterior se deduce que,

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = 3\mathbf{m} - \mathbf{m} = 2\mathbf{m}$$

Llevando las operaciones realizadas a la expresión del campo,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{3}{r^5} (\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2\, \mathbf{m}) + \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

Simplificando queda,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^5} (3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2\, \mathbf{m}) \tag{1.24}$$

La ecuación (1.24) expresa el campo debido a un dipolo puntual situado en el origen de coordenadas y a una distancia $r$ muy grande comparada con las dimensiones del dipolo.

La expresión del campo magnético debido a un dipolo es similar a la obtenida para un dipolo eléctrico y muestra que el campo debido a una distribución de corriente distante no depende de su forma geométrica, sino sólo de su momento dipolar magnético. La diferencia esencial con el dipolo eléctrico es que en éste las

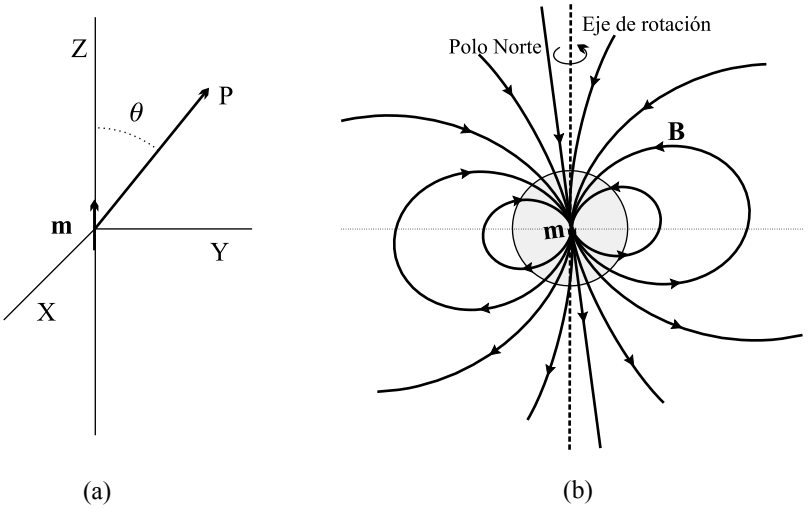



Figura 1.5

líneas de campo tienen su origen en la carga positiva y mueren en la negativa, sin embargo las líneas del dipolo magnético no tienen origen ni final como muestra la figura 1.5(b).

La demostración anterior es de carácter general y sirve para cualquier orientación del dipolo en el origen de coordenadas. Si suponemos el momento dipolar magnético orientado en la dirección del eje Z, como muestra la figura 1.5(a), podemos obtener las componentes del campo magnético de forma más sencilla. En este caso el potencial vector definido por la ecuación (1.21) se puede poner de la siguiente forma,

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{m\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}\mathbf{u}_\varphi$$

Dado que sólo hay componente $A_D(\mathbf{r})_\varphi$, y ésta depende de las variables $r$ y $\theta$, el rotacional en coordenadas esféricas se reduce a la siguiente expresión,

$$\nabla\times\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}_r}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_D(\mathbf{r})_\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{\mathbf{u}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,A_D(\mathbf{r})_\varphi)$$

Operando se obtiene el campo magnético referido al dipolo de la figura 1.5(a),

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o m}{4\pi}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\mathbf{u}_r + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}\mathbf{u}_\theta\right) \tag{1.25}$$

La figura 1.5(b) muestra la líneas de campo correspondientes a un dipolo magnético ideal que proporciona una idea aproximada de cómo se distribuyen las líneas de campo en la tierra, considerada ésta como un dipolo magnético situado en su centro. El eje de rotación no coincide con el eje del dipolo. El momento de este dipolo está orientado de tal manera que forma un ángulo de $168{,}5^o$ aproximadamente con el eje de rotación. En el polo norte las líneas de campo entran verticalmente y en el sur salen. Esta asignación es opuesta, como hemos visto antes en el circuito plano, a la que utilizamos para una espira, que es la utilizada para un imán o un solenoide, y se debe a que el polo norte de una brújula, aguja magnética, se orienta en hacia el sur. Con la definición dada para una espira el polo norte de la tierra sería el sur magnético.

Las líneas de campo magnético terrestre se deben a un momento dipolar $m \simeq 8{,}2 \times 10^{22} \left[\mathrm{A\,m^2}\right]$ ), y el campo varía desde $3 \times 10^{-5}\,\mathrm{Wb/m^2}$ en el ecuador hasta $6 \times 10^{-5}\,\mathrm{Wb/m^2}$ en los polos. El campo magnético terrestre fluctúa con el tiempo, además depende de las zonas geográficas y de las tormentas magnéticas provocadas por el Sol. En los estudios de paleontología se han observado fluctuaciones del campo y también periodos en los que se ha invertido la orientación de los polos. Durante los últimos cien millones de años el campo ha permanecido en el entorno de los valores actuales.

## 4. DIPOLO EN UN CAMPO MAGNÉTICO

### 4.1. Par de fuerzas sobre un dipolo

Vamos demostrar cómo se puede poner el par de fuerzas que ejerce un campo magnético sobre una corriente en función del momento dipolar. Suponemos que el campo donde se sitúa la distribución de corriente es uniforme y que dicha corriente está dentro de un volumen $V'$. El par de fuerzas viene dado por,

$$\mathbf{T} = \int_{V'} \mathbf{r}' \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dv'$$

Desarrollando el producto vectorial doble a partir de (C.11)

$$\mathbf{r}' \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J})$$

$$\mathbf{T} = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) dv' - \mathbf{B} \int_{V'} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}) dv'$$

El segundo término de la ecuación anterior es nulo. Para demostrarlo tenemos en cuenta que para cada una de las componentes de la integral se verifica que,

$$\int_{V'} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{J}) dv' = \int_{V'} (\nabla \frac{1}{2} r'^2) \cdot \mathbf{J} dv'$$

Donde hemos sustituido $\mathbf{r}'$ por $\nabla(\frac{1}{2}r'^2)$. Aplicando la ecuación (1.17), la ecuación anterior será,

$$\int_{V'} (\nabla \frac{1}{2} r'^2) \cdot \mathbf{J} dv' = 0$$

Como habíamos enunciado al principio.

El par de fuerzas se reduce a la siguiente expresión,

$$\mathbf{T} = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) dv' \tag{1.26}$$

Ahora observamos que el cálculo realizado en el apartado 2.2, que lleva desde el término dipolar del desarrollo del potencial vector en la ecuación (1.15) hasta el resultado (1.21), nos permite escribir,

$$\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) dv' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}$$

Comprobamos que es de la misma forma que (1.26), y se trasforma una en otra sin más que cambiar $\mathbf{r}$ por $\mathbf{B}$, por tanto,

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{1.27}$$

*La ecuación anterior expresa el par de fuerzas sobre un dipolo, cuyo momento dipolar es* $\mathbf{m}$, *debido a un campo magnético externo* $\mathbf{B}$.

## 4.2. Energía de un dipolo puntual

Para obtener la energía de un dipolo en función del campo aplicado y del ángulo que forman el momento dipolar con el campo magnético, calculamos el trabajo necesario para girar el dipolo.

Suponemos lo siguiente: que el campo magnético es $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$, que el dipolo está en el plano YZ y forma un ángulo $\theta$ con el eje Z, que el eje de giro es el eje X y por tanto la velocidad angular de giro es $\omega = \omega \mathbf{u}_x$

El trabajo elemental es,

$$dW = \mathbf{T} \cdot (d\theta\, \mathbf{u}_x)$$

Donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -m\, B \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{u}_x$$

Llevando estas relaciones a la ecuación anterior queda,

$$dW = -m\, B \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

El trabajo realizado para pasar del ángulo de referencia $\theta_o$ a $\theta$ será,

$$W = -\int_{\theta_o}^{\theta} m\, B \operatorname{sen}\theta\, d\theta = m\, B(\cos\theta - \cos\theta_o)$$

Si tomamos como cero de energía potencial $\theta_o = \pi/2$,

$$W = m\, B \cos\theta$$

Como la energía potencial es el trabajo realizado contra el campo,

$$U_D = V_D = -m\, B \cos\theta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \tag{1.28}$$

La ecuación anterior muestra que la energía del dipolo es igual a $-mB$ para $\theta = 0$, nula para $\theta = \pi/2$ e igual a $mB$ para $\theta = \pi$. La variación entre distintos ángulos es de forma cosenoidal. Vemos que la posición más estable es la correspondiente a la energía mínima y en ella el dipolo tiene la misma dirección y sentido que el campo.

## 4.3. Fuerza sobre un dipolo puntual

La fuerza sobre un dipolo se puede obtener a partir de la energía. Se puede demostrar[3] que en un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ la relación entre fuerza y energía es la conocida de mecánica y electrostática,

$$\mathbf{F} = -\nabla U_D = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) \tag{1.29}$$

[3] Véase Jackson [8] apartado 5.7.

En el caso de que $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, que presupone que $\mathbf{J} = 0$ en el punto donde se considera $\mathbf{m}$, y teniendo en cuenta la relación vectorial,

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) + \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{m}$$

Como $\mathbf{m}$ es constante y $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, la ecuación anterior se reduce a la siguiente,

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{1.30}$$

Dicha fuerza es nula en el caso de un campo magnético uniforme, ya que $\mathbf{m}$ y $\mathbf{B}$ serían independientes de las coordenadas, y en los demás casos $\mathbf{F}$ depende de la variación de $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ con las coordenadas.

## 5. IMANACIÓN

Los medios materiales están compuestos por átomos y moléculas, que a su vez se componen de partículas como los protones, neutrones y electrones. Los protones y neutrones se concentran en el núcleo y los electrones están dispuestos alrededor del núcleo.

Clásicamente, el movimiento de los electrones alrededor del núcleo se asimila a una corriente sobre una espira que produce un momento conocido como **momento magnético orbital**. Además los electrones se caracterizan por tener un momento magnético intrínseco relacionado con una propiedad mecano-cuántica llamada **espín**. Las partículas del núcleo también tienen un momento magnético intrínseco pero es mucho menor que los momentos orbital y de espín de los electrones, ya que ambos momentos son inversamente proporcionales a sus masas, y tanto la masa del protón como la del neutrón es aproximadamente mil ochocientas veces mayor que la del electrón.

Los distintos átomos que componen un material pueden tener un momento magnético total distinto de cero o nulo, dependiendo de que los momentos orbitales y de espín se anulen o no entre sí. Cuando los átomos tienen un momento magnético distinto de cero, puede ocurrir que su orientación sea al azar, lo que sucede en los materiales llamados **paramagnéticos**; o bien que se produzca una orientación espontánea de todos los momentos en una dirección, como ocurre en los medios **ferromagnéticos**

Si ponemos un material en presencia de un campo magnético, los dipolos se orientan en la dirección del campo debido al par de fuerzas que se ejerce sobre

cada dipolo magnético. Además el campo perturba el momento orbital e induce un cambio en los momentos magnéticos orbitales.

La descripción anterior es de naturaleza clásica y es un modelo aproximado de lo que ocurre con las propiedades magnéticas de los materiales, pero debemos tener presente que dichos fenómenos son de naturaleza cuántica y para un análisis correcto se debe utilizar la mecánica cuántica.

En resumen, un material puede ser considerado como una agrupación de dipolos distribuidos en el volumen que ocupa dicho material. Es decir, el material se comporta como un conjunto de pequeñas espiras recorridas por corrientes denominadas corrientes amperianas.

## 5.1. Vector imanación

Desde un punto de vista macroscópico se tienen en cuenta los momentos dipolares magnéticos mediante la definición de un vector, llamado **imanación o magnetización M**, que es función de los momentos magnéticos atómicos. Si tomamos $\mathbf{m}_i$ como el momento dipolar magnético de cada átomo y consideramos un volumen elemental $\Delta v$, la suma vectorial de los momentos magnéticos en $\Delta v$ será $\Sigma \mathbf{m}_i$ ; la imanación $\mathbf{M}$ se define mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Sigma \mathbf{m}_i}{\Delta v} \tag{1.31}$$

$\mathbf{M}$ *es el momento dipolar magnético por unidad de volumen, conocido con el nombre de* **imanación**. En la definición, el límite de $\Delta v$ se considera de forma que $\Delta v$ sea muy pequeño desde un punto de vista macroscópico, pero al mismo tiempo el número de momentos dipolares $\mathbf{m}_i$ en su interior debe ser grande. De esta forma la función vectorial $\mathbf{M}$ es una función continua que depende del punto considerado. Las dimensiones de $\mathbf{M}$, dado que las de $\mathbf{m}$ son [A $m^2$], serán [A/m].

La imanación $\mathbf{M}$ es por tanto una magnitud que depende del punto donde nos situemos y representa el momento magnético de los átomos que componen un volumen muy pequeño del entorno de dicho punto. Es una función que nos permite obtener el campo magnético producido por un material imanado.

## 5.2. Corriente de imanación

En los materiales no ferromagnéticos, los momentos magnéticos de los átomos o bien son nulos o bien su orientación es aleatoria de forma que la suma es nula. Cuando se aplica un campo externo se orientan los dipolos o se inducen momentos magnéticos en los átomos y en consecuencia se produce una imanación $\mathbf{M}$.

La imanación nos permite describir, desde un punto de vista macroscópico, las características de materiales magnéticos y obtener el campo magnético producido por un material imanado.

La interpretación macroscópica que se hace de los momentos magnéticos de los átomos, es asimilar dichos momentos a pequeñas espiras recorridas por unas corrientes conocidas como corrientes amperianas. A una agrupación de átomos caracterizada por una imanación $\mathbf{M}$ se puede atribuir una corriente, llamada *corriente de imanación*, que permite describir las características del grupo de átomos y calcular el campo magnético debido a ellos. La corriente de imanación no representa un movimiento de cargas a través del material, simplemente es un modelo para expresar el campo debido a los momentos magnéticos de los átomos.

### *Densidad de corriente en el interior del material*

Es interesante encontrar la relación entre la imanación $\mathbf{M}$ y la corriente de imanación. Para ello vamos a estudiar un material cuya imanación no es uniforme, y dentro de dicho material consideramos dos volúmenes elementales $\Delta v = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ contiguos como muestra la figura 1.6(a). En primer lugar analizamos la imanación en dos volúmenes contiguos dispuestos en la dirección de eje Y, y consideramos la componente en la dirección del eje X.

Al primer volumen elemental del conjunto de átomos corresponde una imanación $-M_x\mathbf{u}_x$ en la dirección del eje X, y la relación entre imanación y la corriente de imanación asociada a dicho volumen es,

$$M_x\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = I_1 \Delta S = I_1\,\Delta y\,\Delta z$$

Es decir, la imanación, momento magnético por unidad de volumen, multiplicado por el volumen elemental, es equivalente a una espira de superficie $\Delta y\,\Delta z$ recorrida por una corriente $I_1$.

En el volumen adyacente podemos expresar la imanación mediante un desa-

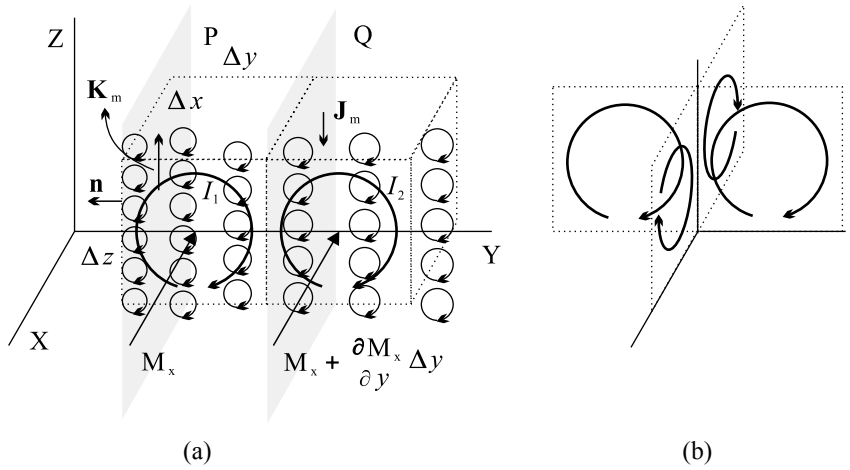



Figura 1.6

rrollo en serie, es decir, por la siguiente relación,

$$\mathbf{M}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial\, y}\Delta y + \text{términos de orden superior (T.O.S)}$$

Si despreciamos los T.O.S, la relación entre corriente e imanación en el segundo volumen elemental será,

$$\left(M_x + \frac{\partial\, M_x}{\partial\, y}\Delta y\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = I_2\,\Delta y\,\Delta z$$

La corriente sobre el plano Q de separación entre los dos volúmenes es,

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{\Delta y\,\Delta z}\left(-\frac{\partial\, M_x}{\partial\, y}\Delta y\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$I_1 - I_2 = -\frac{\partial\, M_x}{\partial\, y}\Delta x \Delta y$$

Esta corriente, dado que la imanación es mayor en el primer volumen elemental que en el segundo, tiene el sentido hacia $z$ negativa.

Si ahora consideramos dos volúmenes elementales contiguos, dispuestos en la dirección del eje X, y operamos sobre la componente en la dirección del eje Y,

$$M_y \Delta x\, \Delta y\, \Delta z = I_1' \Delta x\, \Delta z$$

$$\left( M_y + \frac{\partial\, M_y}{\partial\, x} \Delta x \right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z = I_2'\, \Delta x\, \Delta z$$

$$I_1' - I_2' = -\frac{1}{\Delta x\, \Delta z} \left( \frac{\partial\, M_y}{\partial\, x} \Delta x \right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

$$I_1' - I_2' = -\frac{\partial\, M_y}{\partial\, x} \Delta x\, \Delta y$$

Ahora la corriente neta tiene el sentido de $z$ positivo, dado que en el primer volumen la imanación es mayor. La figura 1.6(b) muestra las corrientes en las caras de contacto.

Dividiendo las corrientes por la superficie tenemos la densidad de corriente superficial en la dirección del eje Z sobre el plano de separación entre los dos volúmenes elementales,

$$(J_m)_z = \frac{I_1 - I_2}{\Delta x\, \Delta y} + \frac{I_2' - I_1'}{\Delta x\, \Delta y}$$

$$(J_m)_z = \frac{\partial\, M_y}{\partial\, x} - \frac{\partial\, M_x}{\partial\, y}$$

La relación anterior es la componente del rotacional del vector imanación en la dirección del eje Z. Podemos repetir la demostración para las otras componentes y el resultado sería,

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \tag{1.32}$$

En forma verbal, **la densidad de corriente de imanación $\mathbf{J}_m$** en el interior del material igual al rotacional de la imanación en el punto considerado.

$\mathbf{J}_m$ tiene dimensiones de amperio partido por metro cuadrado [A/m$^2$]. Esta corriente, a veces, se denomina densidad de corriente volumétrica, porque se refiere al interior del volumen que ocupa el material imanado. Pero siempre hay que tener presente que no es corriente por unidad de volumen.

### *Densidad de corriente superficial*

Analizaremos lo que ocurre en la superficie que separa un medio imanado con el vacío u otro material no imanado.

Tomando como referencia la figura 1.6(a), y considerando el plano P, la corriente en la dirección del eje Z debido a la componente $x$ cumple la siguiente relación,

$$M_x \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z = I_1 \Delta y \; \Delta z$$

La corriente por unidad de longitud que circula por el plano de separación entre medio y vacío debido a la componente $x$ es,

$$(K_{mx})_z = \frac{I_1}{\Delta x} = M_x$$

De forma análoga procederíamos con la componente $M_y$. Dicha densidad de corriente superficial (corriente por unidad de longitud) se expresa de forma vectorial considerando el vector unitario $\mathbf{n}$ dirigido hacia el exterior del material. La densidad de corriente superficial es máxima cuando la imanación es paralela a la superficie y nula en el caso de que sea perpendicular. Observando las direcciones de $\mathbf{K}_m$ (densidad de corriente superficial), $\mathbf{M}$ y $\mathbf{n}$ tenemos que,

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \tag{1.33}$$

*La* **densidad de corriente de imanación $\mathbf{K}_m$** *sobre la superficie de separación entre un material imanado y el vacío es igual al producto vectorial de la imanación en la superficie por el vector unitario normal a dicha superficie.*

$\mathbf{K}_m$ tiene dimensiones de amperio partido por metro [A/m]. Esta corriente se conoce como densidad de corriente superficial para indicar que se concentra sobre la superficie que limita un material imanado. Pero debemos tener presente que no es una corriente por unidad de superficie.

Las densidades de corriente $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$ deducidas a partir de la imanación se comportan como corrientes localizadas; es decir, ligadas al punto del material considerado y no corresponden a un trasporte de carga en el seno de dicho material. Las cargas libres que se mueven dentro del material se expresan mediante la densidad de corriente $\mathbf{J}$ o $\mathbf{J}_l$.

## 5.3. Campo magnético debido a la imanación

En este apartado vamos a calcular el campo magnético debido a un material imanado que ocupa un volumen $V_o$ limitado por la superficie $S_o$.

La figura 1.7 muestra la situación del material, el punto P donde se calcula el campo y los vectores de posición $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ que indican respectivamente dónde se sitúa P y el volumen elemental de material imanado.

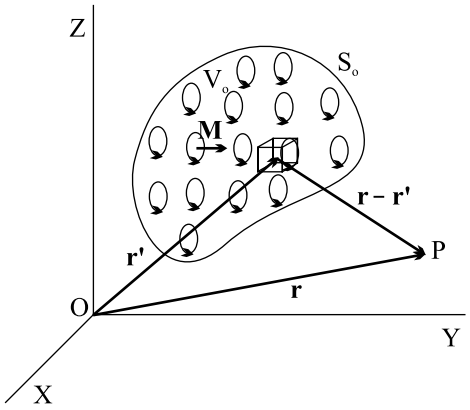



Figura 1.7

### *Potencial vector magnético*

Antes de calcular el campo magnético vamos a obtener el potencial vector $\mathbf{A}$. La ecuación (1.21) nos indica el potencial debido a un momento dipolar $\mathbf{m}$. El potencial vector debido a un momento elemental $d\mathbf{m}$ situado en el origen de coordenadas será,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Si en lugar del origen se sitúa en el punto determinado por el vector de posición $\mathbf{r}'$,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

En el caso de un material cuya imanación es $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$, a un volumen elemental

$dv'$ le corresponde un momento,

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')\, dv' \tag{1.34}$$

El potencial vector debido al material que ocupa el volumen $V_o$ se obtiene sustituyendo la ecuación anterior en la correspondiente al potencial vector elemental e integrando sobre el volumen $V_o$, por tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \tag{1.35}$$

Esta ecuación se puede transformar teniendo en cuenta que,

$$\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El operador $\nabla'$ significa que se deriva con respecto a las variables con prima que corresponden al vector $\mathbf{r}'$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \mathbf{M} \times \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{M}\, dv'$$

Utilizando las relación vectorial siguiente,

$$\nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{M} + \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Tendremos que,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' - \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv'$$

El segundo término podemos transformarlo si aplicamos el teorema de la divergencia:

$$\int_{V_o} \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = \oint_{S_o} \mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ds$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie $S_o$ y dirigido hacia el exterior del volumen. Sustituyendo en el segundo término,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv' - \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{S_o} \mathbf{n} \times \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ds$$

Permutando el producto vectorial en la integral de superficie el potencial vector queda de la forma siguiente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V_o}\frac{\nabla'\times\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \; + \; \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{S_o}\frac{\mathbf{M}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds \tag{1.36}$$

En el apartado anterior obtuvimos las densidades de corriente de imanación, ecuaciones (1.32) y (1.33), si las sustituimos en la ecuación anterior queda,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V_o}\frac{\mathbf{J}_m}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \; + \; \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{S_o}\frac{\mathbf{K}_m}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds \tag{1.37}$$

Vemos que las densidades de corriente $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$ se comportan como si fueran equivalentes a las densidades de corriente $\mathbf{J}$ y $\mathbf{K}$ producidas por el movimiento de cargas[4]. La densidad de corriente $\mathbf{K}_m$ se introduce cuando debemos tener en cuenta una transición muy brusca de un medio a otro; es decir, cuando hay una variación brusca de la imanación. La variaciones suaves de la imanación se representan mediante $\mathbf{J}_m$.

### *Campo magnético*

Un vez obtenido el potencial vector se puede calcular $\mathbf{B}$ mediante la relación entre ambos vectores $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Dado que la densidades de corriente de imanación se comportan de forma similar a la corrientes libres, el campo magnético se puede expresar de manera análoga a como se obtiene a partir de éstas; con estas consideraciones el campo magnético en función de las corrientes de imanación será,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V_o}\frac{\mathbf{J}_m\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv' \; + \; \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{S_o}\frac{\mathbf{K}_m\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}ds \tag{1.38}$$

Los cálculos se han realizado para un punto exterior al material imanado; se puede demostrar[5] que la ecuación (1.37) expresa también el potencial vector en un punto del interior.

Para calcular el campo magnético debido a un material imanado se obtiene en primer lugar, mediante las ecuaciones (1.32) y (1.33), las densidades de corriente

[4] Véanse ecuaciones 12.15 y 12.16 de López Rodríguez [1]

[5] Véase Lorrain y Corson [11] apartado 9.3 página 412.

de imanación $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$, que estarán localizas en puntos del interior o sobre la superficie del material. El campo en un punto se obtiene aplicando la ecuación (1.38) con los valores de $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$ obtenidos.

En el caso de que además del material imanado exista una densidad de corriente de conducción $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, al campo anterior se debe añadir el debido a ésta,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \tag{1.39}$$

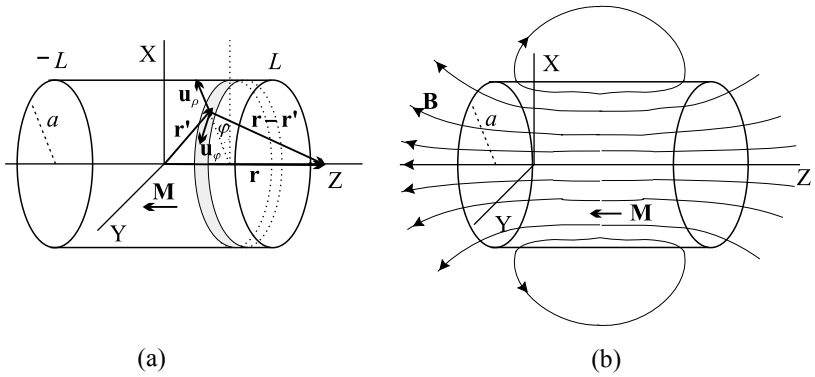



Figura 1.8. Cilindro magnetizado del ejercicio 1.2

**Ejercicio de autoevaluación 1.2**

Dado un cilindro de radio $a$ cuya imanación $\mathbf{M} = -M_o \mathbf{u}_z$ es uniforme. Calcular las densidades de corriente de imanación y el vector $\mathbf{B}$.

**Solución**

Calculamos el campo magnético debido a la barra imanada utilizando la ecuación (1.38) obtenida anteriormente.

En primer lugar calculamos las densidades de corriente de imanación $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$.

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$$

ya que $M$ es constante y cualquier derivada es nula.

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

El vector normal a la superficie lateral del cilindro, en coordenadas cilíndricas, es $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho$. En las caras circulares $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_z$ en la base de la izquierda y $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$ en la de la derecha.

Sobre las caras circulares,

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_z = M_o \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z = 0$$

Sobre la superficie lateral,

$$\mathbf{K}_m = -M_o \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\rho = -M_o \mathbf{u}_\varphi$$

Con los resultados obtenidos para las corrientes, la ecuación (1.39) queda de la siguiente forma,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{S_o} \frac{-M_o \mathbf{u}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds'$$

Los vectores de posición en un punto genérico del eje Z y para un área elemental sobre el cilindro como la indicada en la figura 1.8 son:

$$\mathbf{r} = z\,\mathbf{u}_z \;\; ; \;\; \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_\rho + z'\mathbf{u}_z \;\; ; \;\; ds' = a d\varphi\, dz'$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a\mathbf{u}_\rho + (z - z')\mathbf{u}_z \;\; ; \;\; \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| = \left(a^2 + (z - z')^2\right)^{1/2}$$

Los límites de integración para la superficie $S_o$ del cilindro son: $-L$ y $L$ para la variable $z$, y 0 y $2\pi$ en el caso de $\varphi$. Sustituyendo en la integral tendremos,

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-L}^{L} \int_0^{2\pi} \frac{M_o \mathbf{u}_\varphi \times (-a\mathbf{u}_\rho + (z - z')\mathbf{u}_z)}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} a d\varphi\, dz'$$

Realizando los productos vectoriales queda,

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-L}^{L} \int_0^{2\pi} \frac{M_o (a\mathbf{u}_z + (z - z')\mathbf{u}_\rho)}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} a d\varphi\, dz'$$

Para cada sector $ad\varphi$ la componente $\mathbf{u}_\rho$ tiene un elemento simétrico del mismo módulo pero en el que $\mathbf{u}_\rho$ tiene sentido opuesto; al sumar los elementos opuestos se anulan. Esto significa que la integración de la parte correspondiente al vector unitario $\mathbf{u}_\rho$ es cero. Por tanto,

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_{-L}^{L}\int_0^{2\pi}\frac{M_o a^2 d\varphi\, dz'}{(a^2+(z-z')^2)^{3/2}}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{\mu_o}{4\pi}M_o a^2\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{a^2}\frac{-(z-z')}{(a^2+(z-z')^2)^{1/2}}\right]_{-L}^{L}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B}(z) = -\frac{\mu_o}{2}M_o\left(\frac{(z+L)}{(a^2+(z+L)^2)^{1/2}} - \frac{(z-L)}{(a^2+(z-L)^2)^{1/2}}\right)\mathbf{u}_z$$

Se puede comprobar que el término entre paréntesis de la ecuación anterior es siempre positivo para cualquier valor de $z$. Es decir, el campo magnético tiene la dirección de $-\mathbf{u}_z$ tanto a la izquierda de la barra como en el interior o a su derecha; lo que está de acuerdo con la propiedad fundamental del campo magnético, $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, que corresponde a un campo cuyas líneas no tienen manantiales ni sumideros.

La expresión anterior para una barra muy larga, es decir, para $L\to\infty$ se reduce a la siguiente,

$$\mathbf{B}(z) = -\mu_o M_o \mathbf{u}_z$$

Que es similar al campo debido a un solenoide indefinido. Tendríamos la expresión del solenoide sin más que sustituir $M_o$ por $nI$.

## 6. ECUACIONES DEL CAMPO EN MEDIOS MATERIALES

En esta sección introduciremos dos nuevos conceptos. El primero es el *potencial escalar magnético* y el segundo la *intensidad de campo magnético* o también *campo H* o *campo magnetizante*, que es de gran importancia en electromagnetismo.

## 6.1. Potencial escalar magnético

En electrostática [1] hemos aprendido que en un campo cuyo rotacional es nulo se puede introducir una función potencial que permite resolver muchos problemas electrostáticos utilizando magnitudes escalares con las que se opera mejor. El campo magnético no es irrotacional, salvo que estudiemos una zona donde no existan corrientes. En el apartado anterior hemos obtenido el campo magnético debido a un material imanado a través de las densidades de corriente de imanación. Ahora vamos a demostrar que fuera de dicho material el campo se puede expresar en términos de una función potencial escalar que depende de la imanación, siempre, claro está, que la corriente de conducción $\mathbf{J}$ sea nula.

Para ello calculamos $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ con el potencial vector dado por la ecuación (1.36).

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \nabla \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

Ahora el operador $\nabla$ se aplica en el punto donde se calcula el campo, es decir, $\nabla$ deriva con respecto a las coordenadas de $\mathbf{r}$. Desarrollamos el integrando mediante la relación vectorial (C.43),

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

donde

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad \text{y} \quad \mathbf{G} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

Como $\nabla$ implica derivadas con respecto a las coordenadas del punto determinado por $\mathbf{r}$, y la imanación depende de $\mathbf{r}'$, el segundo y tercer término de la relación vectorial se anulan, por tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \left( \nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv' - \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

El primer término de la relación anterior se calcula a partir de

$$\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la función delta de Dirac, definida en (C.64); a partir de esta definición este primer término queda como:

$$\mu_o \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

Por tanto el campo magnético se trasforma de la manera siguiente,

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

Para simplificar el segundo término utilizamos relación vectorial (C.37),

$$\nabla \left( \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mathbf{M} \times \nabla \times \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

donde los términos que no aparecen son nulos puesto que implican derivadas respecto a coordenadas $\mathbf{r}$ de la imanación, la cual depende de las coordenadas $\mathbf{r}'$. De esta expresión se deduce que,

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \left( \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - \mathbf{M} \times \nabla \times \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right)$$

Como el rotacional del gradiente de una función escalar es nulo,

$$\nabla \times \left( \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = -\nabla \times \left( \nabla \left( \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right) = 0$$

El campo magnético será,

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \nabla \left( \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv'$$

Dado que la integración se hace con respecto a las variables indicadas por el punto $\mathbf{r}'$ y $\nabla$ se aplica a las variables determinadas por $\mathbf{r}$, podemos sacar el operador del signo integral y la expresión queda de la forma,

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mu_o \nabla \frac{1}{4\pi} \int_{V_o} \left( \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv' \tag{1.40}$$

Se define el **potencial escalar magnético** mediante la siguiente ecuación,

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_o} \left( \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dv' \tag{1.41}$$

Vemos que $\phi_m$ depende de la imanación, así como de la posición del material y el punto donde se calcula el potencial escalar magnético.

La ecuación del potencial escalar magnético se puede expresar de otra forma que permita su cálculo de forma más fácil. Si tenemos en cuenta la relación vectorial,

$$\mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{M} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

Y de,

$$\nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \mathbf{M} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M}$$

Se deduce que,

$$\mathbf{M} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M}$$

Aplicando el teorema de la divergencia,

$$\int_{V_o} \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = \oint_{S_o} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds$$

$\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie $S_o$.

El potencial escalar magnético queda de la forma siguiente,

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_o} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \tag{1.42}$$

Todo lo anterior nos lleva a que podemos expresar el campo magnético de la manera siguiente,

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) - \mu_o \nabla \phi_m \tag{1.43}$$

Si además del material imanado tenemos una distribución de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, el campo magnético se expresará mediante la ecuación,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \mu_o \nabla \phi_m + \mu_o \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{1.44}$$

Las ecuaciones (1.38) (1.39) y (1.44) son dos formas de expresar el campo magnético en función de la corriente $\mathbf{J}$ debida al trasporte de carga, y de la imanación $\mathbf{M}$ que tiene su origen en los momentos magnéticos de los átomos; es decir, en las denominadas corrientes amperianas.

## 6.2. Intensidad de campo magnético

Nos interesa establecer las ecuaciones que rigen el comportamiento del campo **B** en presencia de medios materiales. Para ello veremos como se expresan el teorema de la circulación, el teorema de Ampère, y el flujo de dicho campo.

### *Teorema de Ampère*

Si aplicamos el rotacional a la ecuación (1.44), teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado 12.2 de López Rodríguez [1], y que el rotacional del gradiente es nulo, el teorema de Ampère en forma diferencial será,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J} + \mu_o \nabla \times \mathbf{M}$$

Agrupando los términos con rotacional,

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \tag{1.45}$$

Aplicando el teorema de Stokes podemos trasformar la ecuación anterior en su forma integral,

$$\oint_C \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.46}$$

La ecuación anterior muestra que la agrupación de los vectores **B** y **M** produce una circulación que sólo depende de la corriente **J**. Esta particularidad induce a introducir un nuevo vector, conocido como **intensidad del campo magnético**[6], que se define mediante la siguiente ecuación,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M} \tag{1.47}$$

Ésta permite posteriormente establecer la ecuación constitutiva que representa una dependencia funcional entre los dos vectores a través de un parámetro característico del medio material considerado.

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{1.48}$$

---

[6] Como hemos dicho al comienzo de esta sección, en ocasiones se denomina *campo magnético H* o también *campo magnetizante*. No es infrecuente reservar el término *campo magnético* para **H** y usar *inducción magnética* para **B**, pero es una nomenclatura que nos parece confusa y por tanto no la usamos en este libro.

La forma que adopta el teorema de Ampère con el nuevo vector es,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.49}$$

La ecuación muestra que la integral de línea de $\mathbf{H}$ sobre un circuito cerrado, a diferencia de $\mathbf{B}$, sólo es función de la corriente libre $\mathbf{J}$. Es decir, la circulación de $\mathbf{H}$ sobre un camino cerrado $C$ sólo depende de la corriente libre neta, corriente originada por el movimiento de cargas libres que atraviesa la superficie cerrada por el camino $C$.

En el caso de corrientes filiformes sobre $N$ conductores que atraviesan la superficie limitada por el contorno $C$,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{N} I_i \tag{1.50}$$

La forma diferencial para corrientes de conducción será,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{1.51}$$

Las ecuaciones (1.49) y (1.50) muestran que la definición del vector $\mathbf{H}$ nos permite calcular dicho campo, en determinadas circunstancias, en función de las corrientes libres sin tener en cuenta la presencia del medio material. Esta es la utilidad que aporta la introducción del vector $\mathbf{H}$.

Si llevamos la definición del vector $\mathbf{H}$ a la ecuación (1.44), tendremos,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \phi_m \tag{1.52}$$

Esta ecuación y la (1.44) ponen de manifiesto que tanto $\mathbf{B}$ como $\mathbf{H}$ dependen de la corriente $\mathbf{J}$ y de la imanación $\mathbf{M}$. Aparentemente no hemos ganado nada con introducir un nuevo vector. Pero además de lo indicado sobre la circulación de $\mathbf{H}$, la ecuación (1.52) muestra que en un material imanado y con $\mathbf{J} = 0$, la intensidad de campo magnético se puede obtener mediante un potencial escalar dependiente de la imanación.

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m \tag{1.53}$$

Esta circunstancia muestra la utilidad de introducir el vector intensidad de campo magnético para estudiar el comportamiento de medios imanados. Además

comprobamos que siendo la circulación nula, ya que $\mathbf{J} = 0$, la intensidad de campo magnético es distinta de cero y depende de la imanación, es decir, las fuentes de $\mathbf{H}$ dependen de $\mathbf{M}$ cuando la corriente debida al transporte de cargas es nula. Si $\mathbf{J}$ no es nula $\mathbf{H}$ depende de ambas fuentes como muestra la ecuación (1.52).

De la ecuación (1.47) se deduce que las dimensiones de $\mathbf{H}$ son idénticas a las de $\mathbf{M}$, es decir, la **unidad** de $\mathbf{H}$ es el A/m.

### 6.3. Teorema del flujo de B

Hemos visto en la sección 5 que el campo $\mathbf{B}$ tiene su origen tanto en las corrientes debidas a cargas libres como en las localizadas o de imanación. La divergencia de la parte correspondiente a las corrientes de imanación se expresa a través del potencial vector $\mathbf{A}$ obtenido a partir de la imanación, ecuación (1.37). Como $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$, también se cumple que el flujo de $\mathbf{B}$ a través de una superficie cerrada es nulo. Desde el punto de vista del flujo las corrientes localizadas, pequeñas espiras, se comportan como las libres, es decir, *el campo* $\mathbf{B}$ *no tiene manantiales ni sumideros y en consecuencia el flujo a través de una superficie cerrada es nulo*; por tanto,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{1.54}$$

Que en forma diferencial equivale a una divergencia nula, es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.55}$$

Teniendo en cuenta la definición del vector $\mathbf{H}$, despejando $\mathbf{B}$ de la ecuación (1.47) y sustituyendo en la relación anterior queda,

$$\int_S \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

De ella se deduce que,

$$\int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} \tag{1.56}$$

En forma diferencial,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \tag{1.57}$$

Esta ecuación muestra que *las líneas de intensidad de campo* $\mathbf{H}$ *sí tienen manantiales y sumideros, ya que su flujo a través de una superficie cerrada en*

*general no es nulo*. Dicha ecuación muestra que las fuentes escalares de $\mathbf{H}$ *tienen su origen en zonas donde la imanación* $\mathbf{M}$ *presenta una discontinuidad*, o de otra forma, donde el flujo de $\mathbf{M}$ a través de una superficie cerrada es distinto de cero. En esos casos se puede definir una densidad de carga de imanación como

$$\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario de define la superficie de discontinuidad. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, en los extremos de una barra cilíndrica uniformemente imanada.

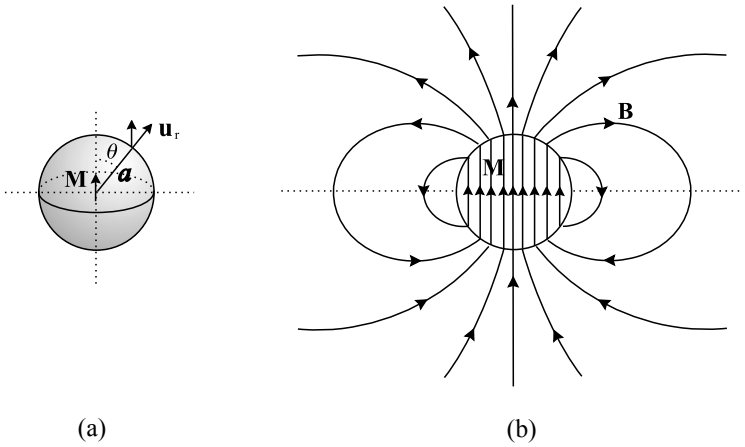



Figura 1.9. Esfera magnetizada del ejercicio 1.3

**Ejercicio de autoevaluación 1.3**

Dada una esfera de radio $a$, cuya imanación es uniforme e igual a $\mathbf{M} = M_o \mathbf{u}_z$ (ver figura 1.9), calcular el potencial escalar magnético $\phi_m$ sobre el eje Z y los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$.

**Solución**

Para calcular el potencial escalar magnético $\phi_m$ debemos obtener primero los valores de $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ sobre la superficie de la esfera y $\nabla \cdot \mathbf{M}$ en el interior de la esfera.

Como $\mathbf{M} = M_o \mathbf{u}_z \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, y la integral de volumen de la ecuación

(1.42) se anula. Queda por tanto que,

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_o} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, ds$$

Sobre la superficie de la esfera de radio $a$ indicada en la figura 1.9(a),

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_r = M_o \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r = M_o \cos\theta$$

Los vectores de posición que intervienen en la integral son:

$$\mathbf{r} = z\,\mathbf{u}_z \;\; ; \;\; \mathbf{r}' = a\mathbf{u}_r$$

Dado que la relación entre los vectores unitarios en coordenadas esféricas y cartesianas para $\mathbf{u}_r$ es,

$$\mathbf{u}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{u}_y + \cos\theta\,\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r}' = a(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{u}_y + \cos\theta\,\mathbf{u}_z)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{u}_y) + (z - a\cos\theta)\mathbf{u}_z$$

$$\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|^2 = a^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) + z^2 + a^2\cos^2\theta - 2az\cos\theta$$

$$\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| = \left(a^2 + z^2 - 2az\cos\theta\right)^{1/2}$$

La superficie elemental sobre la esfera es $ds = a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$. Los límites de integración para $\theta$ son 0 y $\pi$; para $\varphi$ 0 y $2\pi$. La integral queda de la forma,

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 M_o \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi}{(a^2 + z^2 - 2az\cos\theta)^{1/2}}$$

La integración con respecto a $\varphi$ es igual a $2\pi$.

Si se hace el cambio de variable $u = \cos\theta$, $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$. La integral ahora será,

$$\phi_m = -\frac{a^2 M_o}{4\pi} 2\pi \int_1^{-1} \frac{u\, du}{(a^2 + z^2 - 2az\,u)^{1/2}}$$

El cambio de variable ha supuesto un cambio en los límites de integración. Para $\theta = \pi \rightarrow u = \cos\pi = -1$. Para $\theta = 0 \rightarrow u = \cos 0 = 1$, en consecuencia,

$$\phi_m = -\frac{a^2 M_o}{2} \int_1^{-1} \frac{u\, du}{(a^2 + z^2 - 2az\, u)^{1/2}}$$

Integrando por partes,

$$\phi_m = \frac{a^2 M_o}{2} \left[ \frac{2(2(a^2 + z^2) + 2az\, u)}{3(2az)^2} \left(a^2 + z^2 - 2az\, u\right)^{1/2} \right]_1^{-1}$$

$$\phi_m = \frac{a^2 M_o}{6} \left[ \frac{(a^2 + z^2) + az\, u}{(az)^2} \left(a^2 + z^2 - 2az\, u\right)^{1/2} \right]_1^{-1}$$

$$\phi_m = \frac{a^2 M_o}{6(az)^2} \left( ((a^2 + z^2) - az) \left(a^2 + z^2 + 2az\right)^{1/2} \right) - \frac{a^2 M_o}{6(az)^2} \left( ((a^2 + z^2) + az) \left(a^2 + z^2 - 2az\right)^{1/2} \right)$$

$$\phi_m = \frac{a^2 M_o}{6(az)^2} \left( \left((z + a)^2\right)^{1/2} (a^2 + z^2 - az) - \left((z - a)^2\right)^{1/2} (a^2 + z^2 + az) \right)$$

Dado que se trata de números reales, el radicando debe ser siempre positivo, por tanto distinguiremos dos zonas, una para $|z| < a$, es decir, dentro de la esfera, y otra para $|z| > a$, fuera de la esfera.

***Dentro de la esfera*** $|z| < a$

En este caso podemos expresar el potencial escalar magnético de la manera siguiente:

$$\phi_m = -\frac{M_o}{6\, z^2} \left( (a^2 + z^2 + az)(a - z) - (z + a)\left(a^2 + z^2 - az\right) \right)$$

$$\phi_m = \frac{M_o}{3} z$$

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{3}M_o z\right)\mathbf{u}_z = -\frac{1}{3}M_o\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H}+\mathbf{M}) = \mu_o(-\frac{1}{3}M_o\mathbf{u}_z + M_o\mathbf{u}_z) = \frac{2}{3}\mu_o M_o\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_o M_o\mathbf{u}_z$$

Tanto $\mathbf{B}$ como $\mathbf{H}$ son uniformes dentro de la esfera y $\mathbf{H}$ tiene sentido opuesto a $\mathbf{M}$, mientras que $\mathbf{B}$ tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{M}$.

***Fuera de la esfera*** $|z| > a$

Ahora podemos expresar el potencial escalar magnético de la manera siguiente:

$$\phi_m = -\frac{M_o}{6\,z^2}\left((a^2+z^2+az)(z-a) - (z+a)\,(a^2+z^2-az)\right)$$

$$\phi_m = \frac{M_o\,a^3}{3\,z^2}$$

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m = -\frac{d}{dz}\frac{M_o a^3}{3\,z^2}\mathbf{u}_z = \frac{2}{3}M_o\frac{a^3}{z^3}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B} = \mu_o\mathbf{H} = \frac{2}{3}\mu_o M_o\frac{a^3}{z^3}\mathbf{u}_z$$

Los campos $\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}$, para $|z| > a$, tienen la misma dirección y sentido tanto si $z > 0$ como si $z < 0$; es decir, debemos interpretar que $z^3 = |z|^3$. Además podemos comprobar que en $z = a$ se cumple la continuidad de las líneas de campo magnético $\mathbf{B}$ y la discontinuidad de las líneas de $\mathbf{H}$. Las líneas de $\mathbf{H}$ nacen y mueren en los puntos donde existe una discontinuidad en la imanación $\mathbf{M}$; es decir, en puntos situados sobre la superficie de la esfera imanada. Se inician en los puntos donde $\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$ es positivo y terminan donde $\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$ es negativo.

La figura 1.9(b) muestra de forma cualitativa las líneas de campo dentro y fuera de la esfera. Las líneas de $\mathbf{H}$ coinciden con las de $\mathbf{B}$ fuera de la esfera

y tienen sentido opuesto dentro (no están dibujadas dentro). Las líneas de **B** y **M** coinciden dentro de la esfera y las de **H** se oponen a las de **B** y **M**.

El análisis de las características de la intensidad de campo magnético nos permite añadir algunas consideraciones sobre dicho campo. La primera es que de la ecuación (1.52) se deduce que **H** depende de la imanación además de la corriente **J**. Pero al mismo tiempo de dicha ecuación, dado que la integral de línea sobre un camino cerrado del gradiente de una función escalar es nula, se deducen los resultados que expresan las ecuaciones (1.49) y (1.50); es decir, que la integral de línea a lo largo de un camino cerrado depende únicamente de la corriente que atraviesa la superficie limitada por el camino de integración. Esta propiedad, en los casos en que la simetría del sistema lo permita, nos facilita la obtención de la intensidad de campo magnético en función de la corriente. La corriente es una magnitud que se mide fácilmente con un amperímetro, por tanto esto justifica que en magnetismo se utilice con frecuencia la intensidad de campo magnético como magnitud de referencia.

Como hemos visto en el ejercicio anterior los campos **B** y **H** dentro de un material imanado tienen sentidos opuestos. Esto nos permite analizar experimentalmente cuál de los campos es el responsable de la fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada que atraviesa la barra imanada; los experimentos realizados muestra que la fuerza depende del campo magnético **B**.

Como resumen de las características de los tres vectores de campo **B**, **H** y **M**, vamos a analizar comparativamente los campos producidos por un solenoide muy largo pero finito y una barra uniformemente imanada de las mismas dimensiones.

Tanto el solenoide como la barra imanada se comportan prácticamente como si fueran indefinidos. En la figura 1.10 se muestran las líneas de los vectores de campo correspondientes a solenoide y barra imanada.

Como consecuencia del teorema del flujo las líneas de **B** son continuas tanto para el solenoide como en la barra. En el solenoide $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$.

En el exterior de la barra $\mathbf{M} = 0$ y por tanto $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$, pero debemos tener en cuenta que **H** tiene su origen en las corrientes localizadas o de imanación. En el interior de la barra $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, es decir, **B** depende de la imanación en cada punto del interior y de la discontinuidad de **M** en los extremos de la barra. Esta discontinuidad determina las fuentes que originan la intensidad de campo magnético **H**.

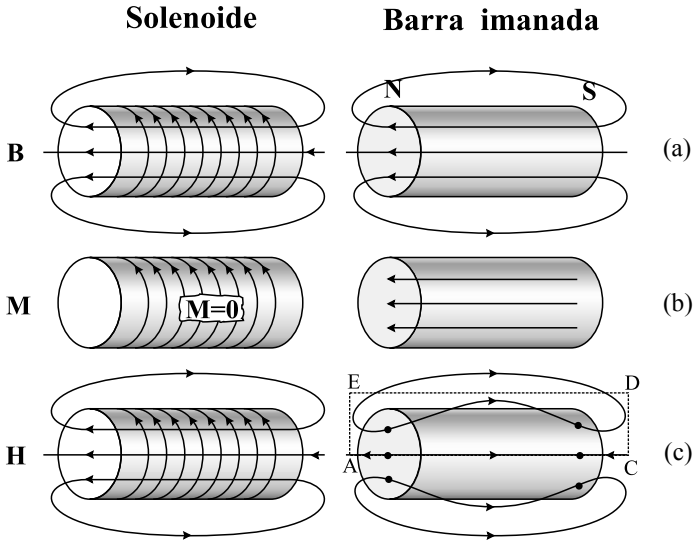



Figura 1.10

La imanación es cero en el solenoide e igual a $\mathbf{M}$ en el interior de la barra, siendo nula en el exterior.

En los extremos de la barra se produce una discontinuidad de $\mathbf{M}$, pasa del valor $\mathbf{M}$ a cero en la sección transversal. Por esta razón en cada extremo, si calculamos el flujo de $\mathbf{M}$ a través de una caja cilíndrica que incluya en su interior la superficie de separación entre barra y vacío, dicho flujo será distinto de cero e igual a $\mathbf{M} \cdot \pi a^2 \mathbf{n}$. Donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la sección transversal, que es paralelo a $\mathbf{M}$ y su sentido depende del extremo elegido, el mismo que $\mathbf{M}$ en el lado izquierdo y contrario en el derecho. Por tanto en el extremo izquierdo,

$$\int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = \pi a^2 M$$

en el derecho,

$$\int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = -\pi\, a^2 M$$

Las dos expresiones anteriores nos muestran el valor de las fuentes del campo $\mathbf{H}$.

La líneas de campo $\mathbf{H}$ en el solenoide son de la misma forma que $\mathbf{B}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_o$. En la barra las diferencias son notables. Tanto en el interior como en el exterior

la líneas de **H** tienen sentido norte sur y su origen está en las discontinuidades de **M**, es decir, en las secciones transversales de los extremos. En el interior **H** y **M** tienen sentido opuesto,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{M}$$

En el exterior,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o}$$

En la barra imanada la integral de línea de **H** a lo largo del camino cerrado ACDE indicado en la figura 1.10(c) es nula como se deduce de la ecuación (1.50) cuando $\sum I_i = 0$. Esto se interpreta fácilmente, en el tramo interior la integral tiene un signo y en el exterior el contrario, ya que el campo **H** tiene sentido opuesto en los dos tramos.

En los párrafos anteriores hemos visto que el campo **H** se opone a **M** en el interior de la barra y por esta razón se le llama *campo desimanador*.

## 7. SUSCEPTIBILIDAD Y PERMEABILIDAD

Hasta ahora hemos estudiado los vectores de campo en materiales que tienen una imanación espontánea **M**; es decir, materiales cuyos átomos tienen un momento dipolar orientado permanentemente en una dirección. La mayoría de los materiales no presentan imanación espontánea y la orientación de los dipolos atómicos depende del campo magnético que se aplica externamente.

Los medios materiales, desde el punto de vista del campo magnético, tienen unas propiedades que permiten su clasificación. Dichas propiedades se expresan a través de las ecuaciones constitutivas que relacionan los vectores **B**, **H** y **M**.

En un toroide de material magnético la circulación del vector **H** sobre un camino cerrado sólo depende del flujo de corriente a través de la superficie limitada por el camino; por tanto podemos calcular **H** sin tener en cuenta el material, y **H** se mide a través de la corriente suministrada a las espiras que rodean el toroide. Dada esta circunstancia, interesa establecer una relación funcional entre **M** y **H** y a partir de ella obtener la ecuación constitutiva que relaciona **B** con **H**; es decir, interesa definir **M** en función de **H** y mediante la ecuación (1.48) obtener la ecuación constitutiva que relaciona **B** con **H**.

Inicialmente podemos establecer una clasificación de los materiales magnéticos

atendiendo a que la dependencia entre $\mathbf{M}$ y $\mathbf{H}$ o entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ sea o no lineal. En el caso de medios no lineales además se puede dar la circunstancia de que con el campo $\mathbf{H}$ debido a corrientes libres nulo, sea $\mathbf{M} \neq 0$; estos materiales presentan imanación permanente y se les conoce como imanes.

En los medios lineales se verifica que $\mathbf{M}$ es proporcional a $\mathbf{H}$ de forma que,

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{1.58}$$

*La constante de proporcionalidad $\chi_m$ se denomina* **susceptibilidad** *y depende del tipo de material. Si es homogéneo, $\chi_m$ no depende del punto considerado; cuando es isótropo, $\chi_m$ no depende de la dirección y sentido de $\mathbf{H}$.*

Para la mayoría de los medios lineales $|\chi_m| << 1$.

Atendiendo al valor de $\chi_m$ podemos clasificar los materiales en cinco grupos.

**Diamagnéticos** si $\chi_m < 0$. Estos materiales se caracterizan por que el dipolo inducido se opone al campo inductor. Todos los materiales tienen una contribución diamagnética, ya que el momento orbital de sus electrones disminuye al aplicar un campo $\mathbf{H}$. En los sólidos $\chi_m \simeq -10^{-5}$.

**Paramagnéticos** cuando $\chi_m > 0$. En los materiales paramagnéticos el momento magnético intrínseco de cada átomo es distinto de cero; los dipolos se orientan al azar cuando no se aplica un campo $\mathbf{H}$. Si se aplica un campo $\mathbf{H}$ los dipolos se orientan en la dirección del campo, y aunque la agitación térmica tiende a orientarlos al azar, proporciona un valor de $\mathbf{M}$ tal que $\chi_m > 0$ ($\chi_m$ es positiva y ligeramente superior a $10^{-5}$); es decir, dicha orientación supera el efecto diamagnético.

**Ferromagnéticos** Los materiales ferromagnéticos [7] son paramagnéticos extremos, es decir, los dipolos atómicos/moleculares inducen a los vecinos a orientarse en su mismo sentido si tienen ese grado de libertad. En estos materiales $\chi_m$ (entre $10^3$ y $10^4$) es muy superior a los otros casos y además depende del campo $\mathbf{H}$; es decir, el medio no es lineal. Los analizaremos con más detalle en la sección 9. A su vez, se consideran como subtipos de ferromagnéticos los dos tipos siguientes.

[7] Llamados así porque las primeras observaciones de este comportamiento específico se realizaron en materiales compuestos por hierro (Fe)

**Antiferromagnéticos** Son materiales en los que el alineamiento de los dipolos se ordena de manera que los dipolos próximos se orientan en sentido opuesto. Es decir, cada dipolo tiene a sus vecinos orientados en sentido contrario; y como tienen el mismo módulo no se observa ninguna variación del campo magnético cuando se aplica un campo externo. Presentan comportamiento no lineal con campos externos.

**Ferrimagnéticos** Aquí también se produce un alineamiento anti paralelo como en los antiferromagnéticos, pero en este caso los módulos de los dipolos contiguos son distintos, por tanto hay una manifestación externa. Generalmente el incremento del campo observado se debe a que los dipolos de mayor intensidad (mayor módulo del momento) se orientan en la dirección del campo y los más débiles en sentido contrario. Presentan comportamiento no lineal con campos externos.

La ecuación constitutiva en medios lineales que relaciona $\mathbf{B}$ con $\mathbf{H}$ se obtiene llevando la ecuación (1.58) a la ecuación (1.48), cuyo resultado es,

$$\mathbf{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\,\mathbf{H} \tag{1.59}$$

*El factor* $(1 + \chi_m)$ *se llama* **permeabilidad relativa**

$$\mu_r = k_m = 1 + \chi_m \tag{1.60}$$

El factor $\mu_r$ o $k_m$ no tiene dimensiones, vale uno en el vacío, es ligeramente menor que la unidad en los materiales diamagnéticos, un poco mayor que la unidad en los paramagnéticos y muy superior a la unidad en los ferromagnéticos.

El factor que multiplica a $\mathbf{H}$ en el segundo miembro de la ecuación (1.59) se le llama **permeabilidad magnética** del material, y su forma matemática es,

$$\mu = \mu_o(1 + \chi_m) \tag{1.61}$$

La unidad de permeabilidad magnética en el SI es el henrio/m (H/m). La definición del *henrio* está relacionada con la inducción magnética (ver tema 2).

En definitiva, *la ecuación constitutiva que relaciona* $\mathbf{B}$ *con* $\mathbf{H}$ *es,*

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H} \tag{1.62}$$

Esta ecuación puede servir para definir $\mu$ como la razón entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$. La permeabilidad $\mu$ es una constante en los medios lineales homogéneos e isótropos,

y de forma análoga a $\chi_m$ depende del punto en los no homogéneos o de la dirección de $\mathbf{H}$ en los anisótropos. En los medios diamagnéticos y paramagnéticos $\mu$ es muy próxima a $\mu_o$ ya que $\chi_m$ es muy pequeña, y en los ferromagnéticos es grande.

En medios diamagnéticos la susceptibilidad es negativa y en los paramagnéticos y ferromagnéticos positiva, es decir, en medios diamagnéticos $\mu$ es ligeramente inferior a $\mu_o$ y en los paramagnéticos y ferromagnéticos superior a $\mu_o$.

## 8. CONDICIONES EN LOS LÍMITES

Las condiciones en los límites para los vectores $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{M}$ se calculan considerando las ecuaciones obtenidas en los apartados anteriores en la frontera que separa dos medios materiales, tanto en el caso de que $\mathbf{J} = 0$ como para $\mathbf{J} \neq 0$.

### 8.1. Medios homogéneos, lineales e isótropos

En este caso las ecuaciones utilizadas son:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad ; \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

#### *Componentes normales*

Aplicamos la primera de las ecuaciones anteriores sobre la caja cilíndrica, de altura $\Delta h$ y superficie $\Delta S$, indicada en la figura 1.11(a). Cuando $\Delta h$ tiende a cero el flujo del campo magnético a través de la superficie lateral es nulo, y el flujo a través de las caras superior e inferior es,

$$\Delta S\, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 + \Delta S\, \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = \Delta S(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1) = 0$$

De donde se deduce que,

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = 0$$

Como $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, queda de la forma,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{1.63}$$

Si desarrollamos la relación anterior en función de las componentes normales y tangenciales tenemos,

$$B_{n2} - B_{n1} = 0 \tag{1.64}$$

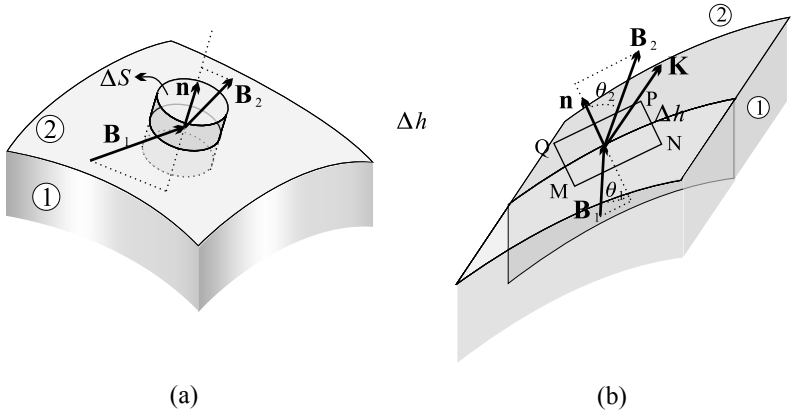



Figura 1.11

*Las ecuaciones* (1.63) *y* (1.64) *expresan la continuidad de las componentes normales de* $\mathbf{B}$ *en la frontera entre dos medios.*

La ecuación constitutiva en cada medio es,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$$

De donde se deduce que,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2}$$

*Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación* (1.64) *obtenemos la relación entre las componentes normales de* $\mathbf{H}$ *en el límite de dos medios lineales, que es de la forma,*

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0 \tag{1.65}$$

o también,

$$\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0$$

### *Componentes tangenciales*

Si aplicamos la circulación de $\mathbf{H}$ sobre el circuito cerrado MNPQ indicado en la figura 1.11(b), con $\mathrm{MQ} = \mathrm{NP} = \Delta h$, $\Delta h \to 0$, y suponiendo que en la superficie

de separación existe un densidad de corriente superficial $\mathbf{K}$, se llega a la ecuación siguiente,

$$\mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{l} - \mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{l} = \mathbf{K} \cdot (\Delta l \cdot \Delta h\, \mathbf{n}_s)$$

$\mathbf{n}_s$ es el vector unitario normal a la superficie limitada por MNPQ, que se ha elegido de forma que $\mathbf{K}$ tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{n}_s$, $\mathbf{K} = K\mathbf{n}_s$.

Dado que $\mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{l} = H_2\, \Delta l\, \operatorname{sen}\theta_2 = H_{2t}$ y $\mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{l} = H_1 \Delta l\, \operatorname{sen}\theta_1 = H_{1t}$, y considerando que $\Delta h \to 0$, queda,

$$H_2 \operatorname{sen}\theta_2 - H_1 \operatorname{sen}\theta_1 = K$$

Las componentes tangenciales de $\mathbf{H}$ cumplen la siguiente relación,

$$H_{2t} - H_{1t} = K \tag{1.66}$$

Se puede expresar la ecuación anterior en forma vectorial si consideramos que $\mathbf{K}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie de separación entre los medios) y el primer miembro se puede poner en forma de producto vectorial de $\mathbf{H}$ por $\mathbf{n}$; es decir, la ecuación queda de la siguiente forma,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \tag{1.67}$$

Ya que,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = H_{2t}\mathbf{n}_s \;\; ; \;\; \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = H_{1t}\mathbf{n}_s \;\; ; \;\; \mathbf{K} = K\mathbf{n}_s$$

*De las relaciones anteriores se deduce que las componentes tangenciales de* $\mathbf{H}$ *no son continuas en la frontera entre dos medios cuando por dicha frontera circula una densidad de corriente* $\mathbf{K}$.

Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1}$$

Obtenemos,

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1}\right) = \mathbf{K} \tag{1.68}$$

Si sobre la superficie de separación $\mathbf{K} = 0$, las ecuaciones anteriores se simplifican de la forma siguiente,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \tag{1.69}$$

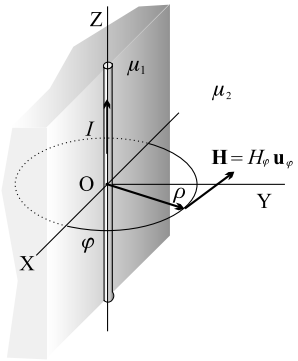



Figura 1.12. Hilo de corriente entre dos medios del ejercicio 1.4.

$$\mathbf{n} \times (\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1}) = 0 \tag{1.70}$$

*La ecuación* (1.69) *expresa la continuidad de las componentes tangenciales de* $\mathbf{H}$ *cuando* $\mathbf{K} = 0$ y, lo mismo que sucede con las componentes normales de $\mathbf{B}$, son independientes del tipo de medio que consideremos.

## 8.2. Medios materiales con imanación

### *Componentes normales*

Ahora siguen siendo aplicables la ecuaciones (1.63), (1.67) y (1.70). Para encontrar el comportamiento de las componentes normales de $\mathbf{H}$, debemos aplicar $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ con $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} + \mathbf{M}$, de donde se deduce que,

$$\int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}$$

Utilizando una forma de cálculo análoga al caso de las componentes normales de $\mathbf{B}$ obtenemos la ecuación siguiente,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \tag{1.71}$$

**Ejercicio de autoevaluación 1.4**

Por un hilo conductor indefinido de radio muy pequeño $a$ y situado sobre el eje Z circula una corriente $I$. Alrededor del hilo se sitúan dos medios materiales, cuyas permeabilidades respectivas son $\mu_1$ y $\mu_2$, separados por el plano XZ como muestra la figura 1.12.

Calcular los vectores $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{M}$ en los dos medios para $\rho > a$.

**Solución**

Para resolver este problema utilizamos en primer lugar el teorema de Ampère y después aplicamos la continuidad de las componentes normales de $\mathbf{B}$ en la superficie de separación, que en este caso es el plano XZ.

Dada la simetría del sistema utilizamos coordenadas cilíndricas.

El hilo es indefinido por lo que el campo no depende de la coordenada $z$. Como el campo debe ser perpendicular a la corriente y al vector de posición en cada punto, el campo creado por la corriente sobre el hilo indefinido solo tiene componente en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}_\varphi$.

Aplicamos el teorema de Ampère considerando que el campo $\mathbf{H}$ es diferente en los dos medios, de manera que,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \;\rightarrow\; H_{\varphi 1}\,\pi\rho + H_{\varphi 2}\,\pi\rho = I$$

El factor $\pi\rho$ es el camino en cada medio.

Por otra parte debemos aplicar la continuidad de las componentes normales de $\mathbf{B}$ en el plano de separación entre los dos materiales, plano XZ,

$$B_{n1} = B_{n2} \qquad B_{\varphi 1} = B_{\varphi 2}$$

Esta relación para el campo $\mathbf{H}$ será,

$$\mu_1\, H_{\varphi 1} = \mu_2\, H_{\varphi 2}$$

Con las dos ecuaciones para el campo $H$ podemos calcular $H_{\varphi 1}$ y $H_{\varphi 2}$.

$$H_{\varphi 1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_2+\mu_1)}\frac{1}{\rho} \qquad H_{\varphi 2} = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_2+\mu_1)}\frac{1}{\rho}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$ en cada medio y que los dos campos tienen la dirección y sentido de $\mathbf{u}_\varphi$,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_2+\mu_1)}\frac{1}{\rho}\,\mathbf{u}_\varphi \qquad \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_2+\mu_1)}\frac{1}{\rho}\,\mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2\ \mu_1\, I}{\pi(\mu_2+\mu_1)}\frac{1}{\rho}\,\mathbf{u}_\varphi$$

Para obtener $\mathbf{M}$ en los dos medios aplicamos la relación,

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} - \mathbf{H}$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_o} - \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_1-\mu_o}{\mu_o}\,\frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_2+\mu_1)}\frac{1}{\rho}\,\mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_o} - \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_2-\mu_o}{\mu_o}\,\frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_2+\mu_1)}\frac{1}{\rho}\,\mathbf{u}_\varphi$$

En este ejemplo se ha puesto de manifiesto la influencia de los medios sobre los valores de los tres vectores de campo.

## 9. MATERIALES FERROMAGNÉTICOS

Existen una serie de materiales —como el hierro, el cobalto y el níquel— en los que se produce un acoplamiento entre los espines de los electrones de la banda de valencia de átomos contiguos. Las fuerzas que intervienen en dicho acoplamiento sólo se pueden explicar mediante la mecánica cuántica; se conocen como *fuerzas de intercambio* y son proporcionales a la integral de intercambio relacionada con el solapamiento de las distribuciones de carga de los iones próximos.

Este acoplamiento desaparece a una temperatura conocida como *temperatura de Curie*, que en el caso del hierro es aproximadamente 770° centígrados. Los átomos de un material ferromagnético se agrupan en zonas llamadas *dominios*

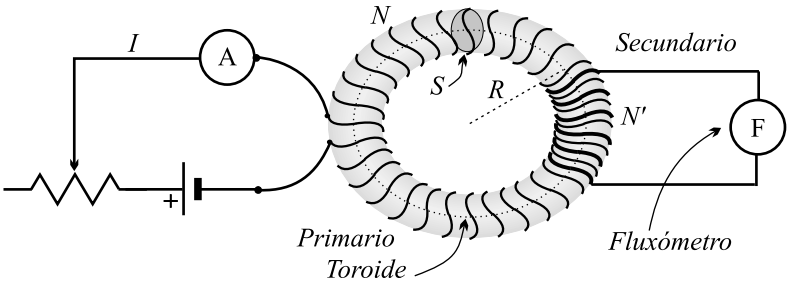



Figura 1.13

compuestas por un gran número de átomos. Las orientaciones de los distintos dominios, cuando no se aplica un campo externo, es tal que la energía magnética del material sea mínima; por esta razón en determinados materiales no se observa campo externo aunque existan grupos de dipolos orientados en su interior. Dependiendo de la composición y su tratamiento, se pueden obtener materiales en los que los grupos de dominios orientados en un sentido permanezcan estables y exteriormente se observa un campo magnético; esto ocurre en los imanes permanentes. Otras veces se procura que la inversión de los dominios se consiga con campos débiles; esto sucede en los materiales llamados blandos utilizados en transformadores.

Estos medios tienen un comportamiento no lineal, muy diferente a los medios lineales, y engloban también a los materiales *antiferromagnéticos* y *ferrimagnéticos* que ya hemos descrito en la sección 7. El comportamiento de estos materiales depende de su composición, así como del tratamiento seguido tanto en su fabricación como de los procesos magnéticos posteriores.

## 9.1. Curva de imanación

Se ha descrito repetidamente a estos materiales como *no lineales*. Esto significque que las relaciones $\mathbf{M}-\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ no son lineales. La relación entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ no puede establecerse mediante una relación matemática sencilla, ya que la relación no es lineal y además depende tanto de la composición y tratamiento del material como de la forma y tamaño del material utilizado para realizar las medidas.

Las características de estos materiales se establecen observando las variaciones del campo magnético $\mathbf{B}$ cuando se aumenta la intensidad de campo magnético $\mathbf{H}$

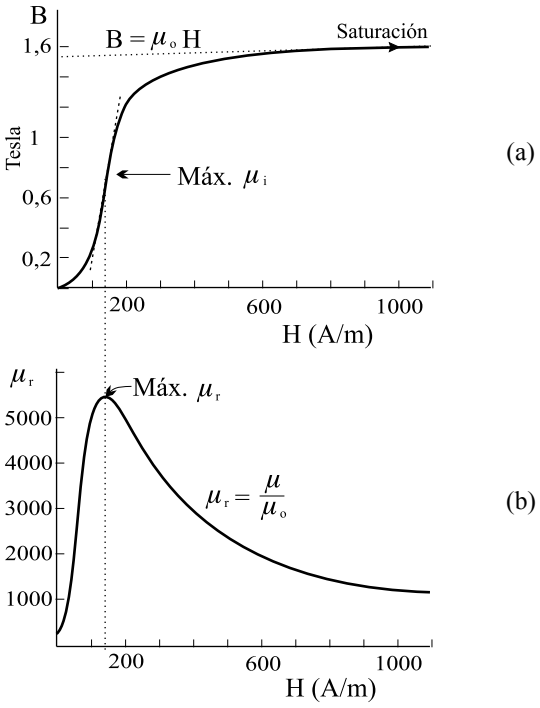



Figura 1.14

aplicado al material. El método para observar las variaciones de **B** en función de **H** consiste en utilizar un toroide de material ferromagnético al que se aplican dos arrollamientos, uno llamado primario y otro secundario, como indica la figura 1.13; al primario se le aplica una corriente $I$ que genera un campo $H = N\,I/l$, y en el secundario se instala un fluxómetro[8] que mide $\Phi = N'\,B\,S$. Este procedimiento se conoce como método del anillo de Rowland.

Se inicia el proceso con el material desimanado; aumentando la intensidad de campo **H** y midiendo el campo **B** a través del flujo magnético se obtiene la **curva de imanación** que muestra en la figura 1.14(a). En dicha curva se comprueba que la relación entre los campos no es lineal puesto que los incrementos del campo $B$ dependen de la zona de la curva considerada. Al principio se necesita

[8] El fluxómetro aquí descrito sigue los principios del transformador eléctrico, cuyos fundamentos se estudian en el tema 2.

un incremento menor de $H$ para obtener un determinado incremento de $B$. En la zona correspondiente a valores elevados de $H$, a un incremento de $H$ corresponde un ligero incremento de $B$; esto se debe a que la imanación $M$ llega a su valor de saturación, y como $B = \mu_o H + M$, $B$ solo aumenta en $\mu_o H$.

En la figura 1.14(b) también se representa la permeabilidad magnética relativa $\mu_r = \mu/\mu_o$ en función del campo **H**. $\mu_r$ alcanza un máximo cuando la relación $B/H$ es máxima, y esto ocurre en el punto donde la recta que pasa por el origen es tangente a la curva de imanación. Los valores de $\mu_r$ en materiales ferromagnéticos son elevados, generalmente superiores a 100.

Se suele introducir la permeabilidad incremental $\mu_i$, que se define mediante la ecuación siguiente,

$$\mu_i = \frac{\Delta B}{\Delta H} \tag{1.72}$$

Dicha permeabilidad $\mu_i$ es función del punto considerado en la curva de imanación. Este valor es el que debemos considerar cuando se miden con un campo alterno las pequeñas variaciones relativas de $B$ con respecto a $H$ ($\Delta B/\Delta H$), con un valor estático $H_o$ superpuesto. Es decir cuando se mide la permeabilidad incremental en un punto determinado por $H_o$ en la curva de imanación.

### *Ciclo de histéresis*

Si una vez llegado a la saturación disminuimos el campo $H$, los valores de $B$ obtenidos no coinciden con los anteriores; este efecto se conoce como histéresis, retraso de la imanación al disminuir el campo $H$. Reduciendo el campo $H$ llegamos a $H = 0$, que le corresponde un valor del campo magnético $B = B_r = \mu_o M_r$; $B_r$ se muestra en la figura 1.15 y se denomina **remanencia,** y $M_r$ será la **imanación remanente**. Se sigue el proceso aplicando un campo $H$ en sentido contrario, y para un valor de $H = -H_c$ se observa que $B = 0$; el campo $H_c$ se conoce con el nombre de **campo coercitivo o coercitividad**. Si proseguimos aumentando el campo en sentido negativo llegamos también a una saturación. Volviendo a disminuir el campo se obtiene otra vez un valor de $B = -B_r$, remanencia negativa. Aumentando $H$ volvemos al punto de saturación positiva con lo que se describe un ciclo del material utilizado, conocido como **ciclo de histéresis**; dicho ciclo se muestra en la figura 1.15.

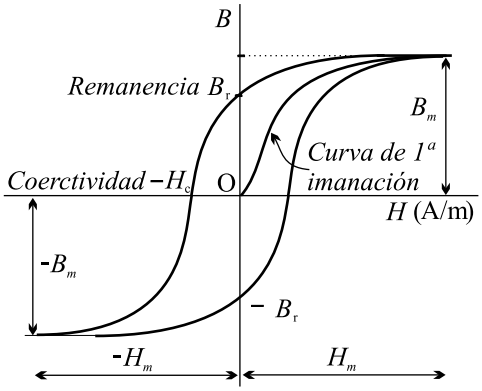



Figura 1.15

La relación $B - H$, además de no lineal es multiforme, es decir para un valor de $H$ existen dos valores de $B$ que la cumplen.

Este comportamiento, característico de los materiales ferromagnéticos, se debe a que los dipolos de un átomo interaccionan fuertemente con los vecinos y además se agrupan en *dominios* cuya orientación en la dirección del campo se hace mediante un proceso muy complicado que incluye tanto el movimiento de las paredes de dominio como la rotación de la orientación de los dominios provocada por el campo aplicado. Por esto se pueden producir grandes aumentos de $B$ con ligeros incrementos de $H$ en la zona no saturada de la curva de imanación y lo contrario en la zona de saturación. Este proceso va acompañado de una fricción, cuyas consecuencias son el retraso de la respuesta en la orientación de los dominios, fenómeno denominado *histéresis*, y la transformación de energía magnética en térmica.

Los valores elevados de la permeabilidad y la remanencia son dos características que determinan la utilización de estos materiales. La primera para conseguir valores grandes de $B$ con pequeños valores de $H$ en los transformadores y otros dispositivos que transmitan energía a través del flujo magnético. La otra utilidad, derivada de la remanencia, se aplica en la construcción de imanes permanentes.

## 9.2. Circuitos magnéticos

Con los materiales ferromagnéticos es posible construir conductos por los que guiar el flujo de **B** y transportarlo de un lugar a otro, formando un **circuito magnético**. Esto es posible por la alta permeabilidad magnética de estos materiales. Efectivamente, supongamos que tenemos un cilindro alargado de este tipo de material, de permeabilidad $\mu$, que está imanado en la dirección del eje del cilindro y rodeado de aire de permeabilidad $\mu_o$; a partir de (1.70) sabemos que

$$B_{\text{ext}} = \frac{\mu_o}{\mu} B_{\text{int}}$$

por lo que, si $\mu \gg \mu_o$, entonces $B_{\text{ext}} \to 0$ y casi todo el campo queda confinado dentro del material.

Obsérvese que hay un paralelismo entre circuitos magnéticos y circuitos de corriente, donde el papel de $\gamma$, $I$, **J** y **E** en los segundos lo juegan respectivamente $\mu$, $\Phi$, **B** y **H** en los primeros. Los circuitos de corriente son mucho más eficaces confinando **J** que los circuitos magnéticos confinando el campo **B**, puesto que en el primer caso la conductividad del medio es muchos órdenes de magnitud superior a la conductividad del vacío; mientras que en el otro lado la permeabilidad de un ferromagnético sólo puede ser como máximo 3 o 4 órdenes de magnitud superior a la del vacío.

## 9.3. Material magnético con entrehierro de aire

Para terminar consideraremos un tipo de problemas frecuente, que es la solución de los campos en el interior de un material inicialmente magnetizado, pero que tiene fronteras con materiales no magnéticos (típicamente, el aire).

El sistema más sencillo de este tipo es un imán toroidal, magnetizado a lo largo de su eje y que por tanto presenta en su interior una cierta magnetización de remanencia, $M_r$ que da lugar a un campo remanente $B_r$. Sus radios interno y externo son parecidos al radio medio, $R_{\text{int}} \lesssim R \lesssim R_{\text{ext}}$ y su longitud total promedio es $l \simeq 2\pi R$. Al toroide se le practica una pequeña ranura de tamaño $d \ll l$, como se muestra en la figura 1.16.

La aplicación de la ley de Ampère proporciona la siguiente ecuación,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_i(l-d) + H_g\, d = 0 \tag{1.73}$$

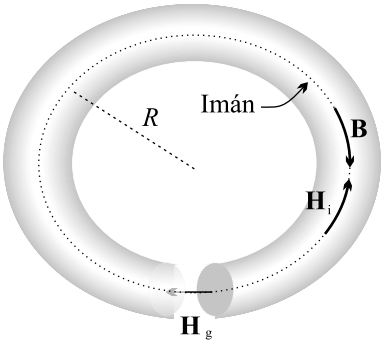



Figura 1.16

De ella se deduce que,

$$H_i = -\frac{d}{l-d} H_g \tag{1.74}$$

El campo $H_i$ en el interior del imán es de sentido contrario al campo $H_g$ en la ranura como muestra la figura 1.16. Suponemos que la dispersión de líneas en la ranura es despreciable y tenemos en cuenta la continuidad de las componentes normales $B$, $B = B_i = B_g$; en consecuencia $B_i$ tiene sentido contrario al campo $H_i$ en el interior del imán.

En la ranura se verifica que,

$$H_g = \frac{B}{\mu_o}$$

En definitiva,

$$H_i = -\frac{d}{\mu_o(l-d)} B \tag{1.75}$$

La imanación $M$ en el imán será,

$$M = \frac{B}{\mu_o} - H_i = \left(\frac{l}{l-d}\right) \frac{B}{\mu_o} \tag{1.76}$$

Para determinar $H_i$ y el campo magnético $B$ debemos utilizar el ciclo de histéresis del imán, ya que dichos campos dependen de la zona del ciclo donde se produzca la intersección entre la recta determinada por la ecuación (1.75) y el ciclo.

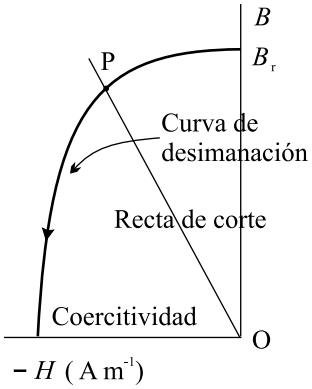



Figura 1.17

La ecuación (1.75) es una recta conocida como *recta de corte*, cuya intersección con la curva de desimanación, segundo cuadrante del ciclo de histéresis, es el punto P que muestra la figura 1.17. Dicho punto es función del espesor de la ranura $d$, la longitud $l$ y la forma de la curva de imanación. Cuanto mayor sea la remanencia $B_r$ y más grande la anchura del ciclo (mayor campo coercitivo $H_c$) más elevado será el campo $B$ que corresponde al punto P.

Por otro lado cuanto mayor sea $l$ en comparación con $d$, la recta de corte $B = f(H_i)$ tendrá una pendiente más grande; en consecuencia a P le corresponderá un mayor valor de $B$ y otro más pequeño de $H_i$. Por esta razón se hacen los imanes permanentes en forma de herradura, ya que al mismo tiempo se consigue un valor grande de $B$ en la ranura y un campo $H_i$ pequeño, que dado su sentido contrario a la imanación $M$, tiende a desimanar el material.

$H_i$ tiene sentido contrario a $B$ y $M$ en el imán. Si en la ranura colocamos una chapa de material cuya permeabilidad $\mu >> \mu_o$, según la ecuación (1.75), aumenta la pendiente, lo que supone aumento de $B$ y disminución del campo desimanador $H_i$. Esta es la razón por la que se unen los polos del imán con una chapa de hierro cuando no se está utilizando.

## 10. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 1.1** Una disolución de sal común (NaCl) de concentración $10^{-3}$ molar presenta una conductividad $\gamma = 12{,}6\,\mathrm{S/m}$ y un coeficiente Hall $R_H = +2{,}1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m^3/C}$. Calcular las conductividades parciales de los iones $Na^+$ y $Cl^-$.

**E 1.2** En un bloque imanado de gran tamaño, con $\mathbf{M} = M\mathbf{u}_x$, se realiza un taladro cilíndrico indefinido y de radio $R$ ($R$ mucho menor que las dimensiones del bloque), cuyo eje coincide con el eje Z. Véase la figura E1.2.

- Calcular la densidad de corriente de imanación $\mathbf{J}_m$ y también $\mathbf{K}_m$ sobre las paredes del cilindro.
- Con las corrientes anteriores, calcular $\mathbf{B}$ sobre el eje Z.

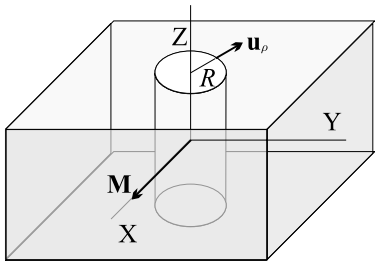


Figura E1.2

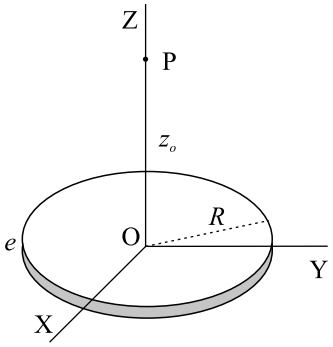


Figura E1.3

**E 1.3** Un disco de radio $R$ y espesor $e$ ($e << R$), como el indicado en la figura E1.3, está constituido por un material imanado uniformemente en la dirección del eje Z, $\mathbf{M} = M\mathbf{u}_z$.

- Calcular las densidades de corriente de imanación $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$.
- A partir de las densidades de corriente $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$, calcular el campo magnético en el punto P(0, 0,$z_o$), ($z_o >> e$).

**E 1.4** Tenemos una arandela, de radio interior $a$, exterior $b$ y espesor $e$, ($e \ll a$), como muestra la figura E1.4. La arandela está imanada uniformemente, con $\mathbf{M} = M\mathbf{u}_z$.

- Calcular las densidades de corriente de imanación $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$.

- Utilizando las corrientes $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$, calcular el campo magnético $\mathbf{B}$ en el punto P del eje Z, OP $= z_o$, $(z_o \gg e)$.

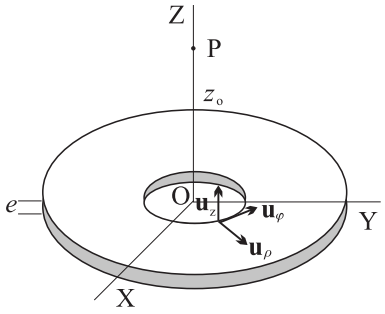



Figura E1.4

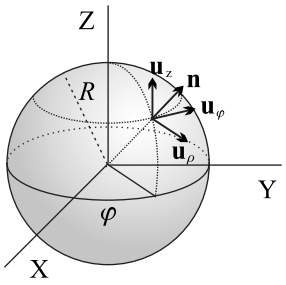



Figura E1.5

**E 1.5** La distribución de imanación sobre una esfera de radio $R$, que se muestra en la figura E1.5, es:

$$\mathbf{M} = \left(k\, z + k'\right) \mathbf{u}_z$$

- Calcular las densidades de corriente de imanación $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$.
- Con estas densidades calcular el potencial vector magnético en el origen de coordenadas.

**E 1.6** Dos cilindros indefinidos coaxiales, cuyos radios están indicados en la figura E1.6, son de un material conductor, siendo sus respectivas permeabilidades $\mu_1$ y $\mu_2$. Por los cilindros circulan corrientes del mismo valor pero con sentidos contrarios. Se suponen uniformes las densidades de corriente.

Calcular el campo magnético $\mathbf{B}$ en función de la distancia al eje.

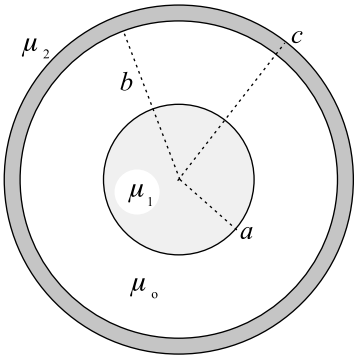



Figura E1.6

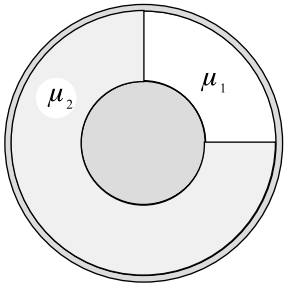



Figura E1.7

**E 1.7** Tenemos un sistema de conductores coaxiales indefinidos, cuyos radios respectivos son $R_1$ y $R_2$. Por el conductor de radio $R_1$ circula la corriente $I$ y por el otro una corriente $I$ en sentido contrario. En el espacio entre conductores existe dos zonas de material, como indica la figura E1.7, con permeabilidades $\mu_1$ y $\mu_2$.

Calcular los vectores de campo $\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}$ en el espacio entre conductores.

**E 1.8** En un medio magnético indefinido se practica un hueco cilíndrico, indefinido en la dirección del eje X. El hueco se recubre con una capa cilíndrica de otro material. La sección transversal del sistema se muestra en la figura E1.8. Sobre el eje X situamos un conductor filiforme indefinido por el que circula una corriente $I$. Las permeabilidades de los dos medios son $\mu_1 = 10\mu_o$ y $\mu_2 = 100\mu_o$.

Calcular los vectores $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{M}$ en los distintos medios.

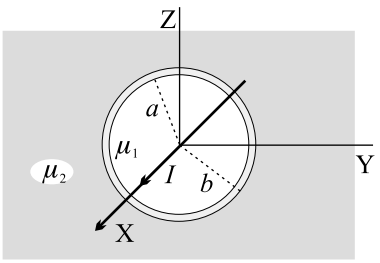



Figura E1.8

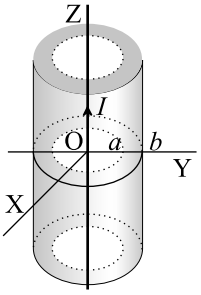



Figura E1.9

**E 1.9** Un tubo indefinido en la dirección del eje Z de material magnético con permeabilidad $\mu$, cuyo radio interior es $a$ y el exterior $b$, se dispone como indica la figura E1.9. Sobre el eje del tubo, eje Z, se sitúa un hilo indefinido por el que circula una corriente $I$.

Aplicando las condiciones en los límites para los vectores $\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}$, calcular $\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}$ dentro y fuera del material que compone el tubo.

**E 1.10** Dado un cable coaxial, de radio interior $a$ y exterior $b$. El espacio interior esta ocupado por dos medios de permeabilidades $\mu_1 = 2\mu_o$ y $\mu_2 = 3\mu_o$, véase la figura E1.10. Por el conductor de radio $a$ circula una corriente $I$, y por el de radio $b$ una corriente $I$ en sentido opuesto.

- Calcular los vectores de campo $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{M}$ en los dos medios magnéticos.
- Calcular la densidad de carga de imanación $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ en la superficie de separación entre los dos medios.

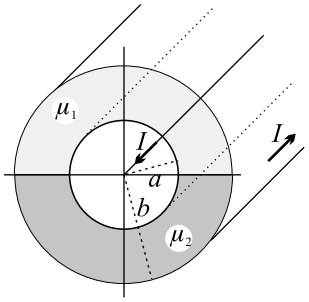



Figura E1.10

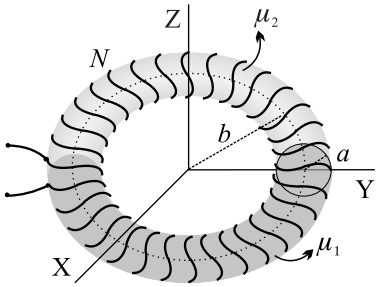



Figura E1.12

**E 1.11** En la superficie de separación de dos medios l.h.i, en la que $\mathbf{K} = 0$, demostrar que,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0, \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \times \left( \frac{\nabla \times \mathbf{A}_1}{\mu_1} - \frac{\nabla \times \mathbf{A}_2}{\mu_2} \right) = 0$$

Siendo $\mathbf{n}$ el vector normal a la superficie de separación; $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ el potencial vector en cada medio; $\mu_1$ y $\mu_2$ las permeabilidades respectivas.

**E 1.12** Sobre un toroide se arrollan $N$ espiras por las que circula una corriente $I$. El toroide, como muestra la figura E1.12, tiene un radio medio $b$ y sus sección un radio $a$ ($b >> a$). Se compone de dos mitades cuyos materiales respectivos tienen permeabilidades $\mu_1$ y $\mu_2$. El plano que separa los dos materiales es perpendicular a la circunferencia de radio $b$.

Calcular los vectores $\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}$ en los distintos puntos de la circunferencia de radio $b$.

**E 1.13** Un toroide de radio exterior 11 cm e interior 9 cm, está construido con un material cuya curva de imanación se muestra en la figura E1.13. Sobre el toroide se arrollan 1000 espiras.

Suponemos que no hay dispersión de líneas de campo, siendo dicho campo prácticamente uniforme en el toroide. El radio medio del toroide es 10 cm.

- Calcular la corriente mínima $I$ que debe circular por las espiras para que el material del toroide alcance la saturación.

- Calcular el valor del flujo, correspondiente a la saturación de $M$, que puede atravesar una de las espiras del toroide, cuyo radio $R$ es un centímetro.

**E 1.14** Disponemos de un toroide con una ranura de espesor $d = 2\,\text{mm}$. El radio medio es $R = 10\,\text{cm}$. y su sección tiene un radio $a = 1\,\text{cm}$. Sobre el toroide se arrollan 1000 espiras por las que circula una corriente $I = 2\,\text{A}$.

El toroide se ha construido con un material cuya curva de primera imanación se muestra en la figura E1.14. Suponemos que antes de aplicar la corriente el material estaba desimanado. Además se supone que no hay dispersión de líneas de campo y que la sección es la misma para el flujo en material y ranura.

Calcular el campo magnético $\mathbf{B}$ en la ranura o entrehierro.

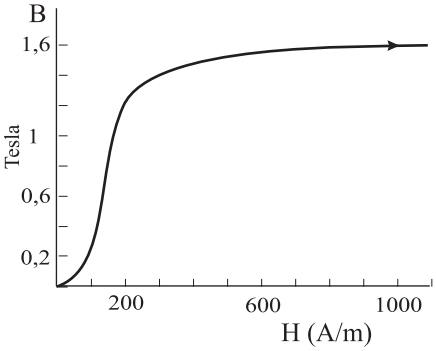



Figura E1.13

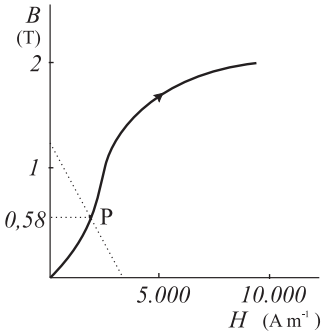


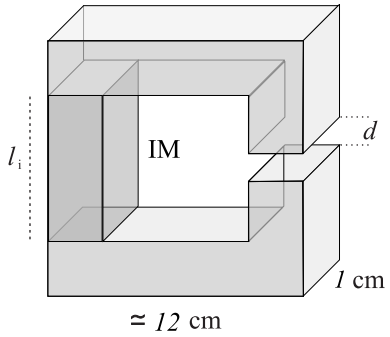

Figura E1.14

**E 1.15** En la figura E1.15(a) se muestra un circuito magnético compuesto por un imán permanente (IM) de longitud $l_i = 10\,\text{cm}$, y la sección es un cuadrado de 1 cm. de lado. En serie se montan dos piezas polares de la misma sección que el imán y cuya longitud aproximada es $l \simeq 7\,\text{cm}$. Entre las piezas polares queda una ranura de espesor $d = 1\,\text{mm}$.

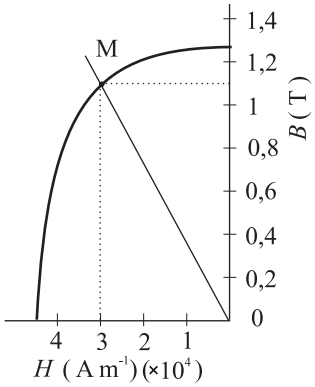
El imán tiene una curva de desimanación como la indicada en la figura E1.15(b), y las piezas polares son de hierro dulce cuya permeabilidad es $\mu = 140\mu_o$.

Suponemos que no hay dispersión de líneas de campo y que las secciones para el flujo son las mismas en todas las partes del circuito magnético.

Calcular el flujo magnético en la ranura.




(a)




(b)

Figura E1.15

Tema 2

# INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

## RESUMEN

### Objetivos generales

Estudiar la inducción electromagnética, fenómeno que pone de manifiesto la generación de un campo eléctrico por un campo magnético variable, y las consecuencias que tiene sobre la interacción entre corrientes y circuitos.

### Objetivos específicos

- Enunciado de las leyes de Faraday y Lenz. Fuerza electromotriz (f.e.m) inducida.
- Ley de Faraday en el caso de circuitos estacionarios.
- Forma diferencial de la ley de Faraday.
- Ley de Faraday para circuitos en movimiento.
- Relación entre campos en los sistemas de referencia fijo y móvil.
- Inducción entre circuitos. Definición de coeficientes de inducción mutua y autoinducción.
- Fórmula de Neumann para los coeficientes de inducción mutua y autoinducción.
- Coeficiente de acoplamiento.
- F.e.m. inducida en función de los coeficientes de inducción mutua y autoinducción.

## Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético, potencial vector magnético, densidad de corriente eléctrica, fuerza electromotriz y fuerza de Lorentz. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial.

## INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estudiado el campo magnético —cuyo origen es el material magnetizado y las cargas con movimiento uniforme— como un objeto de estudio independiente del campo eléctrico— cuyo origen son las cargas eléctricas en reposo—. La relatividad restringida pone de manifiesto que según el sistema de referencia donde se sitúe el observador así será el campo eléctrico y magnético observado, es decir, muestra la interdependencia entre campo eléctrico y magnético. Antes de que Einstein introdujera la relatividad restringida, la dependencia entre los campos eléctrico y magnético se observó en el análisis del comportamiento de campos magnéticos variables. Faraday descubrió la conexión entre campo eléctrico y magnético que permite considerarlos como un sistema interconectado conocido bajo el nombre de campo electromagnético.

En este tema vamos a estudiar la inducción electromagnética y los coeficientes de inducción mutua y autoinducción, parámetros que dependen de la geometría de los circuitos y caracterizan su comportamiento en el caso de campos variables.

## 1. LEY DE FARADAY

En este apartado vamos a estudiar la inducción electromagnética, que pone de manifiesto la dependencia entre campo eléctrico y magnético, es decir, muestra que un campo eléctrico puede originarse mediante un campo magnético variable y que, en este caso, el campo eléctrico no es conservativo.

Los experimentos realizados por Faraday en 1831, dieron como resultado que *en un circuito se induce una f.e.m. $\mathcal{E}$ proporcional a la variación del flujo a través de la superficie que limita el circuito*. Dicha variación puede ser debida a un cambio del campo magnético $\mathbf{B}$ con el tiempo o al movimiento o deformación del circuito.

Por otra parte Lenz estableció que *la corriente debida a la f.e.m inducida se opone al cambio de flujo*, es decir, la corriente inducida crea un campo magnético que tiende a conservar el flujo. Si disminuye el flujo, la corriente inducida crea un campo que se opone a la disminución de flujo. El campo inducido no siempre tiene dirección y sentido opuesto al campo inductor; por ejemplo, si decrece el flujo la corriente inducida crea un campo del mismo sentido para que no disminuya el flujo. Es lo que se conoce como **Ley de Lenz**.

La expresión matemática que resume las dos proposiciones se conoce como

**Ley de Faraday** y expresa que la f.e.m. inducida es igual a menos la derivada sustancial (total) del flujo con respecto al tiempo,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1) podemos expresarla en función del campo que actúa sobre las cargas en el conductor y del campo magnético $\mathbf{B}$ que origina el flujo magnético sobre la superficie $S$ que limita el conductor $C$.

Si el campo eléctrico que actúa sobre las cargas del conductor que forma el circuito cerrado $C$ es $\mathbf{E}$, la f.e.m. inducida será,

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

El flujo del campo $\mathbf{B}$ sobre la superficie $S$ que limita el contorno $C$ es,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Utilizando las dos relaciones anteriores, podemos expresar la ley de Faraday de la forma siguiente,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) representa una ley general que se aplica a cualquier contorno $C$, *exista o no un conductor sobre* $C$. Esta ley muestra que un campo eléctrico puede ser generado por el flujo variable de un campo magnético. Además la ecuación anterior muestra que *la integral del campo eléctrico a lo largo de un circuito cerrado no es nula, es decir, el campo* $\mathbf{E}$ *no es conservativo*. Aquí tenemos un campo eléctrico no coulombiano, es decir, no conservativo, en el que las líneas de campo no tienen su origen en una carga positiva y su fin en otra negativa.

La variación del flujo puede originarse por distintos procedimientos, bien por que varía el campo magnético con el tiempo, o por que se mueve o deforma el circuito $C$. Vamos a estudiar los dos casos aisladamente para terminar expresando la ecuación general que integra las dos formas de inducción.

## 2. MEDIOS ESTACIONARIOS

Cuando se estudia el campo en una zona que permanece estacionaria, o el circuito sobre el que se observa la corriente inducida no se mueve ni cambia de

forma o tamaño, la variación del flujo magnético sólo se debe al cambio temporal de campo magnético $\mathbf{B}$. Por tanto en la ecuación (2.2) se considera que sólo es el campo magnético el que cambia con el tiempo y se sutituye la derivada total por la derivada parcial; en definitiva dicha ecuación queda de la siguiente forma,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.3}$$

La ecuación anterior es la *forma integral de la ley de Faraday* y pone de manifiesto que *el campo eléctrico no es conservativo cuando su origen es un campo magnético que varía con el tiempo*, mostrando la dependencia entre los dos campos.

Debido a la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico entre la superficie interior y exterior del conductor, la relación (2.3) se cumple en la zona exterior al circuito y por tanto la citada relación se verifica para un contorno $C$, sin ser necesario que dicho contorno coincida con un conductor.

## 2.1. Forma diferencial de la ley de Faraday

En medios estacionarios se puede trasformar la ecuación (2.3) aplicando el teorema de Stokes al primer miembro de la igualdad. También se puede introducir la derivada dentro del signo integral, ya que dicha derivación no afecta a la integral cuando el circuito permanece en una posición fija. El primer miembro, considerando que el contorno $C$ delimita a la superficie $S$, cambia de la forma siguiente,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$$

Por tanto,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Dado que la superficie de integración se ha elegido de forma arbitraria y es la misma para las dos integrales, se verifica que,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.4}$$

La ecuación anterior es la forma diferencial de la ley de Faraday, y pone de manifiesto que *el campo* $\mathbf{E}$ *es rotacional, no es conservativo, cuando su origen es*

*un campo magnético variable*. Además la ecuación (2.4) muestra que *un campo eléctrico se puede generar por un campo magnético variable*. Dicha ecuación es una de las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético, conocidas como ecuaciones de Maxwell.

Como aplicación de los conceptos enunciados vamos a proponer un ejercicio.

**Ejercicio de autoevaluación 2.1: f.e.m. en medio en reposo**

Calcular la f.e.m. inducida en una bobina plana y circular, cuyo radio es $R$, número de espiras $N$ y está situada en el plano XY como muestra la figura 2.1. El campo magnético es $\mathbf{B} = B \operatorname{sen} \omega t \, \mathbf{u}_z$.

**Solución**

Se trata de un sistema fijo en un campo variable, por tanto se aplica la expresión para la f.e.m. inducida cuando el medio está en reposo. La ecuación aplicable es la ecuación (2.3) por lo que la f.e.m. observada en los extremos AB de la bobina será,

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

En el flujo del segundo miembro debemos tener en cuenta que el campo magnético atraviesa $N$ espiras y suponemos que no hay fugas; es decir, el mismo campo atraviesa todas las espiras.

El vector normal a la superficie de la espiras es $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$. Como $\mathbf{B}$ es uniforme sobre toda la superficie,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \, (\pi R^2) \, \operatorname{sen} \omega t \, (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z) = \pi R^2 \, B \operatorname{sen} \omega t$$

La f.e.m. inducida en las $N$ espiras será,

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} N \pi R^2 B \operatorname{sen} \omega t = -\omega \, N \, \pi \, R^2 B \cos \omega t$$

El ejercicio anterior nos permite analizar las corrientes inducidas, corrientes de remolino ("eddy currents"), en placas o cuerpos conductores cuando se ponen en

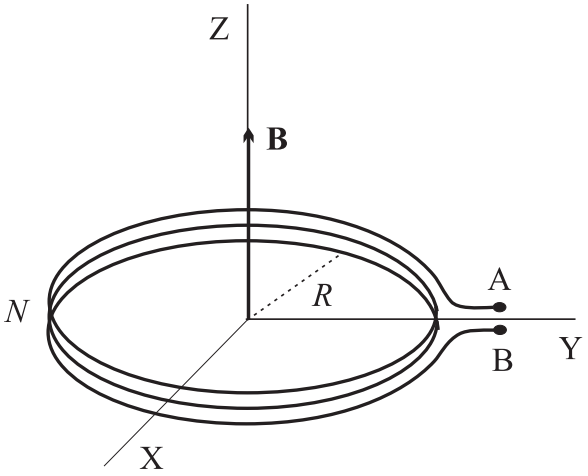



Figura 2.1. Espira del ejercicio 2.1

presencia de un campo magnético dependiente del tiempo. Si disponemos una placa metálica frente a un solenoide alimentado por una corriente alterna, el campo magnético variable producido por el solenoide genera un campo eléctrico variable en el interior de la placa, que ejerce una fuerza sobre los electrones libres y como consecuencia se produce una corriente conocida como corriente de remolino.

Esta corriente genera un campo magnético que se opone a las variaciones de flujo debidas al campo magnético creado por el solenoide; es decir, el campo inducido tiende a que no cambie el flujo en el interior de la placa metálica, o en otras palabras, se opone a la penetración del campo magnético en la placa.

Además la corriente inducida, como toda corriente, disipa energía en la placa debido a que la conductividad de la placa es finita, y como consecuencia ésta se calienta. Este fenómeno es la base del calentamiento por inducción, que se usa tanto en la soldadura de metales como en las cocinas por inducción. Estas corrientes son también las responsables, además de las pérdidas por histéresis, del calentamiento de la chapa de los transformadores, motores y demás dispositivos eléctricos que funcionan con corriente alterna.

## 3. MEDIOS EN MOVIMIENTO

Ahora vamos a estudiar el caso de inducción electromagnética cuando el circuito o medio se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$. Suponemos que la velocidad es pequeña comparada con la de la luz, de manera que son aplicables las transformaciones de Galileo entre el sistema de referencia ligado al contorno $C$ en movimiento y el estacionario donde se observa $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, y que los fenómenos físicos no dependen del sistema donde se sitúe el observador.

Vamos a estudiar la ley de Faraday expresada por la ecuación (2.2) en el caso de un circuito que se mueve con velocidad uniforme $\mathbf{v}$. El segundo término de la igualdad representa la variación total de flujo a través del circuito $C$, que dependerá de la variación debida al cambio con el tiempo del campo magnético además de la variación de flujo debida al movimiento del circuito.

En la figura 2.2 se muestra un circuito $C$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$. $C_1 = C(t)$, $C_2 = C(t+dt)$. $S_1 = S(t)$, $S_2 = S(t+dt)$. $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ en $S_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t+dt)$ en $S_2$.

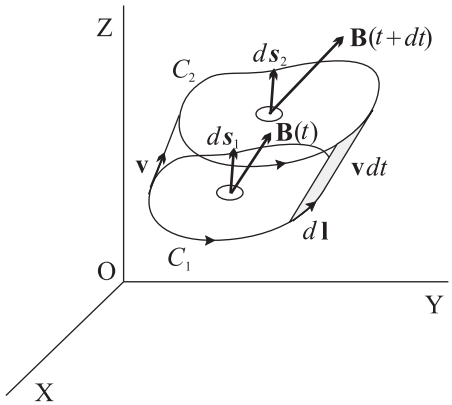



Figura 2.2

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son observados en el sistema de coordenadas fijo OXYZ dibujado en la figura 2.2. Como hemos indicado antes, para que se cumpla la ley de inducción el camino $C$ puede o no coincidir con un circuito formado por un conductor.

Para calcular la variación de flujo, debemos obtener la diferencia entre el flujo a través de las superficies $S_2$ y $S_1$. Es decir, debemos calcular,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{S_2} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{s}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s}_1 \right) \tag{2.5}$$

En el cálculo de la expresión anterior tenemos en cuenta dos cosas:

- que se verifica una de las propiedades fundamentales del campo magnético, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, por tanto,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dv = \int_{S_{tot.}} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- que para $\Delta t \to 0$ se puede desarrollar $\mathbf{B}$ en serie de manera que,

$$\mathbf{B}(t+dt) = \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} dt + \text{T.O.S.}$$

La integral $\int \nabla \cdot \mathbf{B}\, dv$ se calcula en el instante $t'$ sobre toda la superficie que limita el volumen $V$. Dicha superficie está compuesta por $S_1$, $S_2$ y la superficie barrida por el circuito, cuya superficie elemental, superficie lateral sombreada en la figura 2.2, es $d\mathbf{s}_l = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt$.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dv = -\int_{S_1} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s}_2 + \int_{S_l} \mathbf{B}(t') \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt) = 0$$

El signo menos de la ecuación anterior se debe a que para la superficie $S_1$, el vector de la superficie elemental tiene la dirección opuesta a $d\mathbf{s}_1$. De la relación anterior se deduce que,

$$\int_{S_2} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{S_1} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s}_1 - \int_{S_l} \mathbf{B}(t') \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt)$$

Aplicando el desarrollo en serie a la integral sobre $S_1$ tenemos que,

$$\int_{S_1} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s}_1 = \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{s}_1 + \text{T.O.S.}$$

Sustituyendo en la relación anterior, despreciando los términos de orden superior (T.O.S.) y trasponiendo la integral sobre $S_1$ de $\mathbf{B}(t)$ queda,

$$\int_{S_2} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s}_1 = \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}_1\, dt - \int_{S_l} \mathbf{B}(t') \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt)$$

sacando factor común $dt$ en el segundo miembro,

$$\int_{S_2} \mathbf{B}(t') \cdot d\mathbf{s}_2 - \int_{S_1} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{s}_1 = dt \left( \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}_1 - \int_{S_l} \mathbf{B}(t') \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \right)$$

Cuando $\Delta t \to 0$ $C_2 \to C_1$, $S_2 \to S_1 = S(t)$, y la integral sobre la superficie lateral, mediante la relación derivada del producto mixto de vectores $\mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$, se puede trasformar en la integral sobre el camino cerrado $C(t)$,

$$\int_{S_l} \mathbf{B}(t') \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(t)) \cdot d\mathbf{l}$$

ya que cuando $\Delta t \to 0$ la superficie de integración tiene el contorno $C(t)$ y $t' \to t$.

Con las consideraciones establecidas en los párrafos anteriores, poniendo $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}$, la ecuación (2.5), se puede expresar de la forma siguiente,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{2.6}$$

Por tanto, en medios en movimiento la ecuación (2.2), que expresa la ley de Faraday, queda de la forma siguiente,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{2.7}$$

Si trasponemos la integral curvilínea al primer miembro de la ecuación,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_C (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.8}$$

Por otra parte, el segundo miembro corresponde a la situación que hemos descrito en el apartado anterior donde calculamos el efecto exclusivo de la inducción por un campo variable en un circuito estacionario; es decir, aplicamos la ecuación (2.3) pero etiquetamos el campo eléctrico que se obtiene de ésta como $E_e$ para indicar que es la fracción de campo que corresponde a una situación estacionaria:

$$\oint_C \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.9}$$

Aplicando el teorema de Stokes podemos, como hicimos en el caso de medios estacionarios, poner las ecuaciones (2.8) y (2.9) en forma diferencial,

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Esta última ecuación reproduce el resultado obtenido en (2.4). Ambas relaciones son independientes del camino $C$ elegido. Conjugándolas obtenemos:

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

De otra forma,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{2.10}$$

A $\mathbf{E}$ contribuyen tanto $\mathbf{E}_e$, que depende de la variación temporal de $\mathbf{B}$, como el término que llamaremos $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ debido a la traslación del circuito . La f.e.m. derivada del término $\mathbf{E}_m$ se conoce como f.e.m. debida al movimiento del circuito (el subíndice "m" es por "movimiento").

A partir de (2.10) podemos obtener la fuerza electromotriz mediante,

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{E}_e + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{2.11}$$

### 3.1. Cambio de sistema de referencia

Los resultados obtenidos en este apartado corresponden a los observados desde un sistema de referencia con centro en O y que permanece fijo. Sin embargo, es posible hacer una transformación de Galileo y observar el sistema desde, por ejemplo, el punto de vista del circuito $C$ que se está trasladando. En ese caso no existe f.e.m. de movimiento ($\mathbf{E}_m = 0$) ya que la velocidad relativa del circuito es nula. Y sin embargo, en el ámbito de la mecánica no relativista ($v \ll c$), debemos obtener la misma f.e.m. total desde un sistema de referencia que desde el otro.

La solución a la paradoja es que el propio campo magnético se evalúa de forma distinta desde ambos sistemas de referencia y, por tanto, el término $\mathbf{E}_e$, que representa la inducción de Faraday en medios estacionarios, también cambia compensando la anulación del otro término. Es por esto que siempre podemos

encontrar un sistema de referencia en que la ecuación (2.4) refleje todo el campo electromotriz inducido y por eso se considera una ley de carácter general (la Ley de Faraday).

Vamos a ver en más detalle el efecto del cambio de sistema de referencia con un ejemplo sencillo.

***Ejemplo: una barra desplazándose en un campo uniforme***

Una barra conductora de longitud $l$ paralela al eje $z$ y situada en el semiplano $y > 0$, se desplaza en la dirección $y$ positiva a velocidad constante, $\mathbf{v} = v\,\mathbf{u}_y$. La barra está inmersa en un campo magnético constante de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_o\,\mathbf{u}_x & , \quad y \geq 0 \\ 0 & , \quad y < 0 \end{cases}$$

como indica la figura 2.3. Tenemos que calcular la f.e.m. inducida en los extremos A-B de la barra.

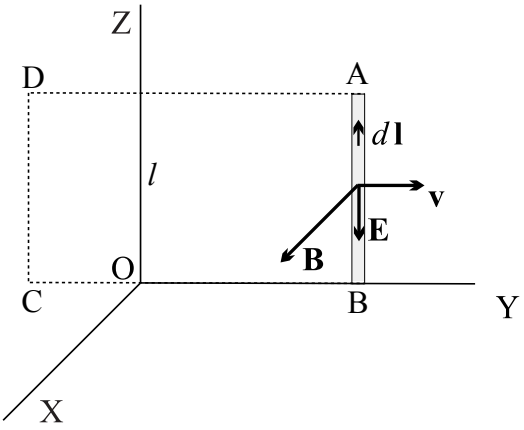



Figura 2.3

Vamos a empezar a resolver el problema desde el sistema de laboratorio. Desde ese punto de vista la barra se encuentra inmersa un campo magnético uniforme y constante y por tanto,

$$\mathbf{E}_e = 0$$

Por otro lado, los portadores de carga libre del conductor (electrones en el caso de un metal) son susceptibles a la fuerza de Lorentz y por tanto son los mediadores de un campo inducido por movimiento,

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = v\, B_o\, (\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x) = -v\, B_o\, \mathbf{u}_z$$

Luego el campo total es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_m = -v\, B_o\, \mathbf{u}_z$$

Este campo no conservativo, al actuar sobre los portadores de carga del conductor, hace que estos se desplacen de forma que en el extremo A se genera un exceso de carga negativa y en el extremo B un exceso de carga positiva. Estas cargas producen un campo electrostático conservativo, $\mathbf{E}^\dagger$, que, en el interior del conductor, es de sentido opuesto al campo inducido; de hecho, el proceso de desagregación de cargas se interrumpe cuando

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^\dagger = 0$$

esto es

$$\mathbf{E}^\dagger = -\mathbf{E} = v\, B_o\, \mathbf{u}_z$$

La f.e.m. inducida $\mathcal{E}$ la obtenemos aplicando (2.11):

$$\mathcal{E} = \int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l (-v\, B_o\, \mathbf{u}_z) \cdot dz\, \mathbf{u}_z = -v\, B_o\, l$$

Ahora vamos a resolver el mismo problema desde el sistema de referencia de la barra. En este caso la velocidad relativa de la barra con el campo es nula y, por tanto,

$$\mathbf{E}'_m = 0$$

Para calcular la f.e.m. inducida consideremos el circuito virtual ADCB que se mueve solidariamente con la barra (ver figura 2.3). La longitud de los segmentos AD y BC es arbitrariamente grande. Entonces, viajando con la barra observamos que el campo magnético va "creciendo" a nuestra izquierda y el flujo que atraviesa el circuito por tanto crece continuamente,

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = (B_o\, \mathbf{u}_x) \cdot (l\, v\, dt\, \mathbf{u}_x) = B_o\, l\, v\, dt$$

de donde, aplicando directamente la Ley de Faraday en su forma (2.1),

$$\mathcal{E}' = -\frac{d\Phi}{dt} = -v\, B_o\, l$$

que es justamente igual a la obtenida en el sistema de referencia fijo.

En general, decidir usar un sistema de referencia u otro depende de la situación concreta que se plantee. Vamos a continuar con otros ejercicios que ejemplifican los conceptos expuestos en esta sección.

**Ejercicio de autoevaluación 2.2**

La figura 2.4 muestra un cilindro imanado, de radio $a$, unido a un disco de conductividad $\gamma$. El cilindro imanado proporciona sobre el disco un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\mathbf{u}_z$. Cilindro y disco giran solidariamente con velocidad angular $\omega$. Mediante unos contactos deslizantes, escobillas, se unen centro y extremo del disco a los puntos A y B.

Calcular la f.e.m. inducida entre los puntos A y B.

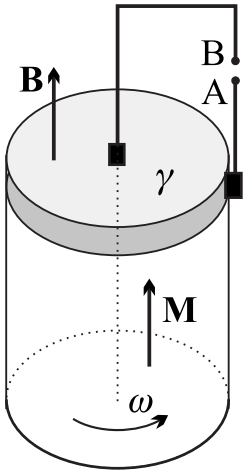



Figura 2.4. Dispositivo del ejercicio 2.2

**Solución**

Suponemos que el imán produce un campo uniforme sobre el disco conductor que gira con la misma velocidad angular $\omega$. Este sistema se comporta como si el imán se mantuviera fijo mientras que el disco se mueve. Además la espira cuadrada también se mantiene fija.

Vamos a hacer los cálculos a partir del término $\mathbf{E}_m$; sabemos que a una distancia $\rho$ del centro del disco la velocidad es:

$$\mathbf{v} = \omega\,\rho\;\mathbf{u}_\varphi$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega\,\rho\,B\,(\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z) = \omega\,\rho\,B\;\mathbf{u}_\rho$$

La f.e.m. entre los bornes A B será,

$$\mathcal{E} = \int_0^a \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l}$$

Como $d\mathbf{l} = d\rho\,\mathbf{u}_\rho$

$$\mathcal{E} = \int_0^a \omega\,\rho\,B\,\mathbf{u}_\rho \cdot d\rho\,\mathbf{u}_\rho = \int_0^a \omega\,B\;\rho\,d\rho$$

La f.e.m inducida es,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,a^2\omega\,B$$

Podemos llegar al mismo resultado si suponemos que se mantienen fijos imán y disco conductor y gira la espira con la misma velocidad angular pero en sentido contrario. Ahora podemos calcular $\mathcal{E}$, bien aplicando la fuerza magnética sobre los electrones de la espira en movimiento, o bien calculando el flujo barrido por la espira en su movimiento giratorio. Se puede comprobar que los resultados son idénticos.

### Ejercicio de autoevaluación 2.3: Generador monofásico

Una espira cuadrada de lado $L$, situada como muestra la figura 2.5, gira con velocidad angular $\omega$ alrededor del eje Z. La espira está en el seno de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_y$.

Calcular la f.e.m. inducida en la espira, que podemos observar en los extremos MN.

**Solución**

Ahora se trata de un sistema en movimiento en el seno de un campo constante. Se puede resolver mediante el flujo magnético, aplicando la ecuación (2.1), o mediante la fuerza magnética, aplicando la ecuación (2.11).

*Cálculo mediante el flujo magnético*

En este caso aplicamos la ley de Faraday expresada por la ecuación (2.1) a la espira que muestra la figura 2.5(a). En primer lugar calculamos el flujo,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$\mathbf{B} = B\,\mathbf{u}_y$ y $d\mathbf{s} = ds\,\mathbf{n}$,

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\,ds\,(\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{n}) = B\,ds\cos\theta$$

Como el campo es uniforme sobre la superficie de la espira de lado $L$,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\,L^2\cos\theta$$

La espira gira con velocidad angular $\omega$, por tanto la relación entre el ángulo $\theta$ y $\omega$ es,

$$\theta = \omega t + \theta_o$$

Donde $\theta_o$ es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{n}$ en el instante $t = 0$. Sustituyendo el valor de $\theta$ en la expresión obtenida para el flujo,

$$\Phi = B\,L^2\cos(\omega t + \theta_o)$$

La f.e.m. inducida en la espira será,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\,L^2\,(-\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_o))$$

$$\mathcal{E} = \omega B\,L^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_o)$$

La ecuación anterior proporciona la tensión entre los anillos MN unidos a la espira. Mediante unos contactos deslizantes (escobillas) se puede aplicar dicha tensión a un instrumento de medida (voltímetro de corriente alterna (c.a.)) para medirla.

*Cálculo mediante* $\mathbf{E}_m$

Ahora aplicamos la ecuación (2.11) a la espira que muestra la figura 2.5(b):

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Calculamos $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en los distintos lados de la espira.

**Lado AB** Sobre cualquier elemento de longitud de este lado $\mathbf{v}$ está en el plano XY y forma un ángulo $\theta$ variable con $\mathbf{B}$, que también está en el plano XY, por tanto $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es perpendicular al lado de la espira, es decir, a $d\mathbf{l}$ y en consecuencia $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$.

**Lado CD** También es nulo el producto $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$, por las mismas razones que el caso anterior.

**Lado AD** Sobre cada longitud elemental de este lado se verifica que,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = v\, B\, \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{u}_z$$

Dado que, $v = \omega\,(L/2)$ y $\theta = \omega t + \theta_o$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2}\, L\, \omega\, B \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o)\mathbf{u}_z$$

**Lado BC** En este caso, dado que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ es $(\pi - \theta)$, $\mathbf{E}_m$ será,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = vB \operatorname{sen}(\pi - \theta)(-\mathbf{u}_z) = -vB \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{u}_z$$

Sustituyendo los valores de $v$ y $\theta$ como en AD,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2}\, L\omega B \operatorname{sen}(\omega t + \theta_o)\, \mathbf{u}_z$$

La integral a lo largo del camino cerrado ADCB en el sentido indicado por la secuencia de letras, sentido horario, considerando que $d\mathbf{l} = \mathbf{u}_z\, dz$ en AD y $d\mathbf{l} = -\mathbf{u}_z\, dz$ en CB, será,

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2}L\omega B\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{D}} \operatorname{sen}(\omega t+\theta_o)\,\mathbf{u}_z\cdot(dz\,\mathbf{u}_z)\\ &\quad -\frac{1}{2}L\omega B\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \operatorname{sen}(\omega t+\theta_o)\,\mathbf{u}_z\cdot(-dz\,\mathbf{u}_z)\end{aligned}$$

La integración de $dz$ entre AD y CB es igual a $L$, por tanto,

$$\mathcal{E} = V_{\mathrm{MN}} = \omega B L^2 \operatorname{sen}(\omega t+\theta_o)$$

Vemos que el resultado es el mismo que el obtenido con el otro procedimiento.

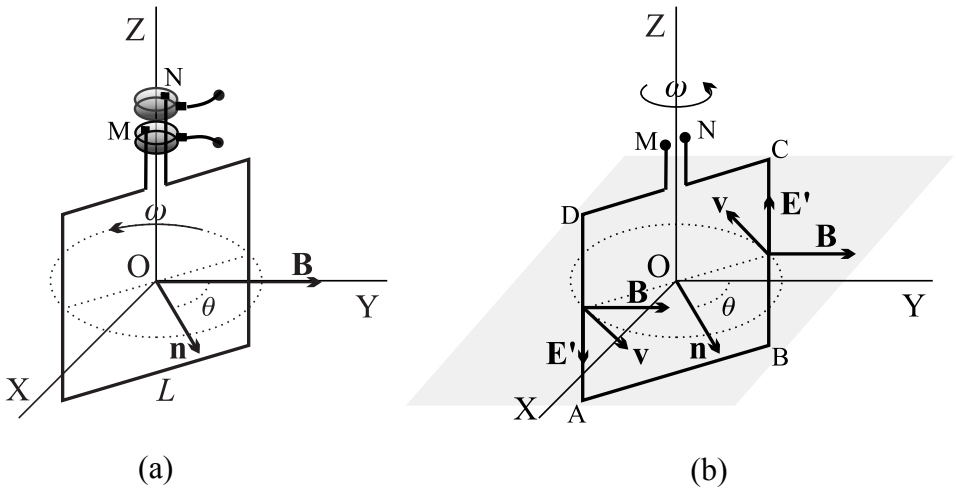



Figura 2.5. Espira cuadrada del ejercicio 2.3

El sistema descrito en el ejemplo anterior representa de forma esquemática los fundamentos de un generador de tensión alterna monofásico. Los generadores reales constan de un inductor constituido por unas bobinas montadas sobre un material ferromagnético y alimentadas por una corriente que producen el campo

magnético $\mathbf{B}$, y un inducido formado por unas bobinas montadas sobre un cilindro, también de material ferromagnético, sobre las que se induce la f.e.m. cuando gira el cilindro. El giro del cilindro, generalmente, se produce mediante una turbina de agua o vapor. El sistema transforma la energía mecánica de la turbina en energía eléctrica, que mediante unos conductores unidos a los bornes de la bobina inductora, se puede aplicar a dispositivos como bombillas de iluminación, motores eléctricos, etc.

## 4. COEFICIENTES DE INDUCCIÓN

En los apartados anteriores hemos expresado la ley de Faraday como una relación entre campos referida a flujos e integrales de línea. Frecuentemente nos interesa tomar un sistema (circuito) como un conjunto y calcular la f.e.m. inducida a través de parámetros geométricos característicos del sistema. A estos parámetros se les conoce con el nombre de *coeficientes de inducción mutua y autoinducción*, según que la inducción sea entre dos circuitos o sobre el propio circuito.

En este apartado suponemos que las corrientes varían lentamente. Este tipo de corriente crea un campo que en cada instante es igual al debido a una corriente continua cuyo valor es $i(t)$. Esto se traduce en que se puede aplicar la ley de Biot y Savart para calcular el campo, donde simplemente se sustituye $I$ por $i(t)$. Además, mientras no se especifique otra cosa, vamos a tratar con circuitos filiformes, es decir, formados por conductores muy delgados, cuya sección es despreciable frente a las otras dimensiones del sistema, pero finita.

El flujo a través de la superficie limitada por el circuito considerado se calcula a partir del campo obtenido mediante la ley de Biot y Savart. Se considera que los medios que intervienen son lineales, por lo tanto la relación entre campo y corriente es lineal, y como consecuencia también es lineal la relación entre flujo y corriente.

### 4.1. Coeficiente de inducción mutua

Dados dos circuitos como muestra la figura 2.6, la f.e.m. inducida en el circuito (2) debida a la variación del flujo originado por el campo que crea la corriente del circuito (1) es,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

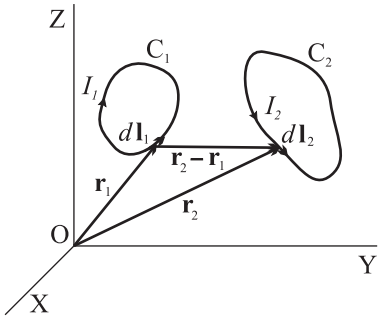



Figura 2.6

Si los circuitos son estacionarios y no deformables, los cambios de flujo $\Phi_{12}$ sólo dependen del campo magnético generado en el circuito (1); es decir, de la corriente $I_1$. Como el flujo que atraviesa el circuito (2) debido al campo creado por la corriente $I_1$ viene dado por la siguiente ecuación,

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2$$

y la ley de Biot y Savart establece que el campo $\mathbf{B}_1$ es proporcional a la corriente $I_1$, entonces flujo y corriente son proporcionales. La constante de proporcionalidad para incrementos de flujo y corriente es,

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_1} \tag{2.12}$$

$M_{12}$ es el **coeficiente de inducción mutua incremental** que se puede aplicar en el caso más general. Cuando los medios son lineales la proporcionalidad entre flujo y corriente es la misma para cualquier flujo, por tanto,

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \tag{2.13}$$

*El coeficiente de inducción mutua $M_{12}$ es igual al flujo que atraviesa el circuito (2), debido al campo creado por el circuito (1), dividido por la corriente en el circuito (1).* El coeficiente $M_{12}$ es el flujo en un circuito por unidad de corriente en el otro.

El coeficiente de inducción mutua es un factor que depende únicamente de la geometría de los dos circuitos, su posición y orientaciones respectivas. Como no

hemos establecido ninguna restricción sobre la forma y disposición de los circuitos, dicho coeficiente no varía si obtenemos el flujo en (1) debido a la corriente en (2); es decir,

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$M$ tiene dimensiones de flujo dividido por corriente. La unidad en el SI es el Wb/A y se le llama *henrio* [H] .

Si en lugar de considerar dos circuitos $C_1$ y $C_2$ independientes, tenemos en cuenta *uno de los circuitos,* también existe proporcionalidad entre el flujo y la propia corriente; *al coeficiente que relaciona flujo y corriente se le denomina ahora coeficiente de* **autoinducción** , *y es de la forma,*

$$M_{11} = L = \frac{\Phi_{11}}{I_1} \tag{2.14}$$

De forma análoga al coeficiente de inducción mutua en medios lineales, el coeficiente de autoinducción $L$ es un factor geométrico que no depende de la corriente que circula por el circuito.

A cualquier dispositivo que presenta un coeficiente de autoinducción $L$ relevante —como por ejemplo un solenoide con núcleo ferromagnético— se le llama *inductor*. Cuando en un circuito sólo tenemos en cuenta la autoinducción, al coeficiente $L$ se le llama *inductancia*, y con frecuencia este mismo nombre, inductancia, se aplica al propio dispositivo.

Para calcular el coeficiente de inducción mutua debemos seguir el procedimiento siguiente: En primer lugar se calcula el campo magnético creado por el circuito (1), para ello podemos suponer que por dicho circuito pasa una corriente $I$. A continuación se calcula el flujo de dicho campo magnético a través del circuito (2). Terminamos el proceso dividiendo el flujo calculado por la corriente $I$.

Se procede de manera análoga para obtener el coeficiente de autoinducción $L$, con la precaución de que ahora se calcula el flujo que atraviesa todas las espiras del propio circuito.

**Ejercicio de autoevaluación 2.4: Coef. de inducción mutua**

Calcular el coeficiente de inducción mutua entre un solenoide indefinido de radio $R_1$ con $n$ espiras por unidad de longitud, y una bobina con $N$ espiras de sección circular cuyo radio interior es $R_2$. La disposición de solenoide y

bobina se muestra en la figura 2.7.

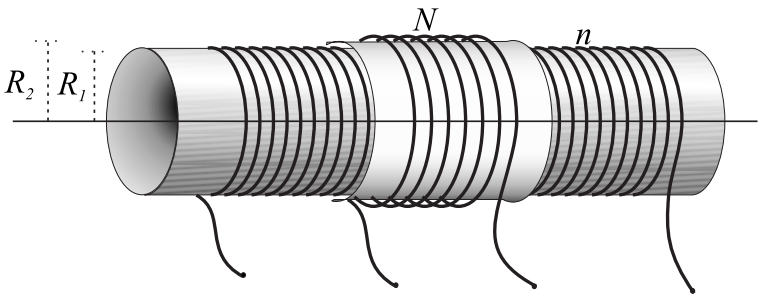



Figura 2.7. Solenoide y bobina del ejercicio 2.4

**Solución**

Suponemos que por el solenoide circula una corriente $I$. Sabemos cómo es el campo magnético debido a un solenoide indefinido (véase ejemplo 12.3 de la referencia [1]).

$$\mathbf{H} = nI\,\mathbf{u}_z, \qquad \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu_o nI\,\mathbf{u}_z$$

y además es uniforme sobre toda la sección circular de radio $R_1$.

Como suponemos que el flujo a través de todas las espiras de la bobina es el mismo, el flujo a través de la bobina será $N$ veces el que atraviesa una espira de radio $R_2$.

En el exterior del solenoide la componente del campo magnético en la dirección del eje es nula. El flujo se calcula sobre la sección del solenoide, ya que fuera el campo es nulo, en consecuencia,

$$\Phi_{12} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \mu_o nI\,\mathbf{u}_z \cdot N(\pi R_1^2\,\mathbf{u}_z) = \mu_o nNI\pi R_1^2$$

El coeficiente de inducción mutua será,

$$M_{12} = M = \frac{\Phi_{12}}{I} = \mu_o nN\pi R_1^2$$

## 4.2. Fórmula de Neumann

En este apartado vamos a calcular el coeficiente inducción mutua entre dos circuitos de forma teórica. Para ello suponemos dos circuitos como los indicados en la figura 2.6 y aplicamos la definición expresada por la ecuación (2.13).

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{1}{I_1}\int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2$$

La relación entre campo y potencial vector es $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Llevando esta relación a la integral anterior tenemos,

$$M_{12} = \frac{1}{I_1}\int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2 = \frac{1}{I_1}\int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{s}_2$$

Aplicando el teorema de Stokes,

$$M_{12} = \frac{1}{I_1}\int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{s}_2 = \frac{1}{I_1}\oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

El potencial vector para un circuito filiforme viene dado por la siguiente ecuación (ver, por ejemplo, referencia [1]),

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Sustituyendo la última ecuación en la anterior queda la siguiente expresión,

$$M_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \tag{2.15}$$

La ecuación (2.15) se conoce con el nombre de *fórmula de Neumann* y nos permite calcular el coeficiente de autoinducción entre dos circuitos filiformes.

La primera conclusión que podemos deducir de la esta ecuación es que, como habíamos indicado anteriormente,

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

ya que el producto escalar es conmutativo, $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1$. Esto nos permite calcular $M_{12}$ por el procedimiento que resulte más sencillo, es decir, si resulta más fácil calcular $\Phi_{12}$ que $\Phi_{21}$, obtenemos el coeficiente a partir del cálculo de $\Phi_{12}$.

La aplicación de ésta formula no es sencilla en muchos casos por que la geometría de los circuitos dificulta el cálculo de las integrales correspondientes. La ecuación (2.15) muestra que $M_{12}$ depende de la geometría del sistema, es decir, el coeficiente de inducción mutua es un parámetro geométrico.

## 4.3. Coeficiente de autoinducción

Podemos aplicar la formula de Neumann para el cálculo del coeficiente de autoinducción tomando las precauciones necesarias para que la integral no se haga infinita.

$$M_{11} = L = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}'_1}{|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1|} \tag{2.16}$$

Los factores $d\mathbf{l}'_1$ y $\mathbf{r}'_1$ se introducen para indicar que en ningún caso pueden tomar exactamente los mismos caminos, de lo contrario el denominador se haría nulo en un punto del circuito y por tanto la integral será infinita. Aquí debemos especificar las condiciones en que podemos operar: En primer lugar los circuitos no pueden tener conductores con radio nulo, es decir, el circuito filiforme supone que el radio es muy pequeño pero no nulo, de forma que en el propio conductor se puedan establecer dos caminos $C_1$ y $C_2$, como muestra la figura 13.9 para un anillo toroidal, que no coinciden, con lo cual siempre $|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1| \neq 0$. La dificultad para el cálculo persiste, dado que las integrales son generalmente difíciles de calcular.

En el cálculo del coeficiente de autoinducción es más fácil encontrar la relación entre flujo y corriente cuando se calcula el flujo en la zona exterior al conductor y la corriente que lo crea está en el interior de dicho conductor. Pero cuando se trata de encontrar la relación entre flujo y corriente en el interior del conductor, se presenta la dificultad de expresar correctamente la corriente que crea el flujo.

Vamos a tratar de explicar esta situación tomando como ejemplo el anillo toroidal indicado en la figura 2.8. Todas las líneas de campo dibujadas, menos M y N, atraviesan las superficies delimitadas por cualquier tubo de corriente elemental que se defina dentro del conductor toroidal. Atendiendo a esta situación la *autoinducción externa* se obtendrá dividiendo el flujo de las líneas de campo *externas* por la corriente total que circula por el anillo toroidal. La dificultad se plantea cuando tenemos que considerar las líneas de campo M y N como parte del flujo total, pues dichas líneas, por ejemplo, no contribuyen al flujo que atraviesa la superficie delimitada por el tubo elemental $C_1$ pero si al que corresponde a $C_2$. Aquí vemos la dificultad de calcular la autoinducción a partir de la definición

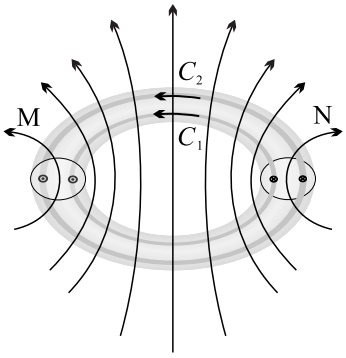



Figura 2.8

expresada por la ecuación (2.14) o mediante la formula de Neumann, ecuación (2.16).

Debido a esta dificultad en los circuitos no filiformes se suele definir el coeficiente de autoinducción mediante la energía magnética, definición que se estudia en el tema 3. Dependiendo del tipo de circuito, su forma y dimensiones, se puede separar con relativa facilidad la parte del coeficiente de autoinducción que corresponde al exterior del dispositivo de la correspondiente al interior del conductor que forma parte de él. Podemos adelantar que la parte interna del coeficiente de autoinducción de un conductor rectilíneo no depende de su radio y es igual a,

$$L_{\text{int.}} = \frac{\mu}{8\pi} l$$

siendo $l$ la longitud y $\mu$ la permeabilidad del conductor.

Veamos un ejercicio típico de cálculo de autoinducción.

**Ejercicio de autoevaluación 2.5**

Calcular el coeficiente de autoinducción de un arrollamiento realizado sobre un material ferromagnético de permeabilidad $\mu$. Por simplicidad supóngase que el material tiene forma de cilindro de sección $S$. El arrollamiento tiene $N$ vueltas dispuestas de forma uniforme a lo largo de una longitud $l$.

**Solución**

Como hemos visto en el ejercicio 2.4 el campo magnético $H$ producido por una corriente $I$ que circula por un arrollamiento cilíndrico indefinido es:

$$\mathbf{H} = nI\,\mathbf{u}_z = \frac{NI}{l}\mathbf{u}_z$$

Esta expresión asume que el cilindro es virtualmente infinito, pero el hecho de usar un núcleo de alta permeabilidad permite relajar esta condición al confinar el flujo en su interior.

Obtenemos el campo magnético $B$,

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \frac{\mu IN}{l}\mathbf{u}_z$$

Este campo genera un flujo en cada espira que es:

$$\Phi_i = \mathbf{B}\cdot\mathbf{S} = \frac{\mu INS}{l}$$

El flujo total que atraviesa el dispositivo es la suma de los flujos en cada espira:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \frac{\mu IN^2 S}{l}$$

Por tanto,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 S}{l}$$

Este dispositivo es el equivalente magnético del condensador de placas planoparalelas electrostático.

**Ejercicio de autoevaluación 2.6**

Calcular el coeficiente de autoinducción de una bobina toroidal con $N$ espiras, sección rectangular y rellena de una material ferromagnético de elevada permeabilidad $\mu$, tal y como la indicada en la figura 2.9.

**Solución**

Suponemos que por las espiras circula una corriente $I$. Además, gracias a la alta permeabilidad del medio, se considera que no hay fugas y que el flujo que atraviesa todas las espiras es el mismo. La simetría del sistema es cilíndrica, y se puede suponer que el campo magnético es $\mathbf{H} = H\,\mathbf{u}_\varphi$ en los puntos interiores al toroide.

Para obtener el campo magnético en un punto interior del toroide, situado a una distancia $\rho$, aplicamos la ley circuital o teorema de Ampère,

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \sum_1^N I_i$$

El primer miembro se calcula teniendo en cuenta que,

$$\mathbf{H} = H\,\mathbf{u}_\varphi \qquad \text{y} \qquad d\mathbf{l} = \rho\, d\varphi\,\mathbf{u}_\varphi$$

La variable de integración es $\varphi$ y los límites 0 y $2\pi$, por tanto,

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} H\,\rho\, d\varphi\,(\mathbf{u}_\varphi\cdot\mathbf{u}_\varphi) = 2\pi\,\rho\,H$$

El número de espiras que atraviesan la superficie que limita la circunferencia de radio $\rho$ es $N$, en consecuencia,

$$\sum_1^N I_i = N\,I$$

Igualando las dos relaciones anteriores y despejando $H$ se obtiene:

$$H = \frac{N\,I}{2\pi\,\rho} \qquad \mathbf{H} = \frac{N\,I}{2\pi\,\rho}\,\mathbf{u}_\varphi$$

de donde obtenemos el campo magnético $B$:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu\frac{N\,I}{2\pi\,\rho}\,\mathbf{u}_\varphi$$

El flujo que atraviesa una de las espiras se obtiene calculando la integral sobre la sección del toroide, que es la superficie rectangular de altura $h$ y anchura $(b-a)$ mostrada en la parte inferior de la figura 2.9.

El campo magnético es el calculado en el párrafo anterior, y la superficie elemental es,

$$d\mathbf{s} = h\, d\rho\, \mathbf{u}_\varphi$$

La variable de integración ahora es $\rho$ y los límites $a$ y $b$. El flujo que atraviesa cada espira será,

$$\Phi_i = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mu \frac{N\,I}{2\pi\rho}\,\mathbf{u}_\varphi \cdot (h\, d\rho\, \mathbf{u}_\varphi) = \mu \frac{N\,I\,h}{2\pi}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Phi_i = \mu \frac{N\,I\,h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

El flujo que atraviesa todas las espiras del toroide es:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \mu \frac{N^2\,I\,h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Obtendremos el coeficiente de autoinducción del toroide dividiendo el flujo $\Phi$ por la corriente $I$. En consecuencia,

$$L = \mu \frac{N^{\,2}\,h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

## 4.4. Coeficiente de acoplamiento

En el estudio de los coeficientes de inducción mutua y autoinducción podemos observar que no todas las líneas de campo creado por el conductor (2) atraviesan la superficie cerrada por el circuito (1), véase la figura 2.8, por tanto $\Phi_{21}$ será menor que el flujo a través del circuito (2) debido al campo creado por él, $\Phi_{21} \leq \Phi_{22}$. De manera análoga ocurre con el campo creado por el circuito (1) y e flujo $\Phi_{12}$, es decir, $\Phi_{12} \leq \Phi_{11}$. Teniendo en cuenta esto vamos a calcular el producto de los coeficientes de autoinducción de los circuitos $C_1$ y $C_2$.

$$L_1\,L_2 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}\frac{\Phi_{22}}{I_2}$$

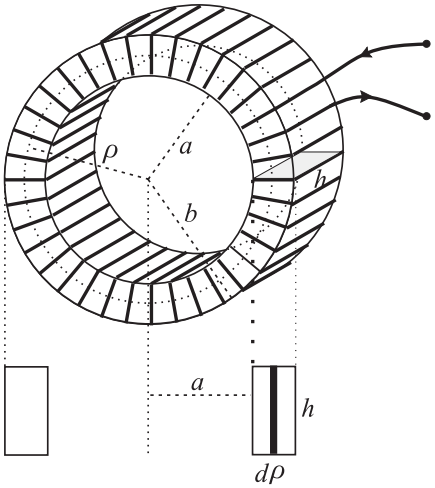



Figura 2.9. Bobina toroidal del ejercicio 2.6

Considerando las desigualdades entre los flujos indicadas anteriormente,

$$L_1\, L_2 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}\frac{\Phi_{22}}{I_2} \geq \frac{\Phi_{12}}{I_1}\frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Dado que $M_{12} = M_{21}$,

$$\frac{\Phi_{21}}{I_1}\frac{\Phi_{12}}{I_2} = M_{12}^2$$

Llevando esta relación a la desigualdad tenemos que,

$$L_1\, L_2 \geq M_{12}^2$$

Podemos expresar la relación entre los coeficientes de autoinducción y el de inducción mutua de la forma siguiente,

$$M_{12} = k\sqrt{L_1\, L_2} \quad \text{con} \quad 0 \leq |k| \leq 1 \tag{2.17}$$

La constante $k$ se denomina constante de acoplamiento, y $|k|$ está comprendido entre 0 y 1. El valor de $k$ puede ser positivo o negativo, dependiendo el signo de los sentidos respectivos de las corrientes en los circuitos. Además $|k|$ nos indica si los circuitos están fuerte o débilmente acoplados. Valores de $|k|$ próximos a la unidad indican que los circuitos están fuertemente acoplados; al contrario si $|k| \ll 1$ se deduce que el acoplo entre dichos circuitos es débil.

## 4.5. Fuerza electromotriz inducida

Cuando un elemento de circuito se caracteriza por un parámetro global como el coeficiente de autoinducción (inductancia) $L$, o se conoce el coeficiente de inducción mutua $M$ entre dos circuitos, interesa expresar la f.e.m. inducida en función de estos parámetros

Utilizando la ecuación (2.6) y la definición de f.e.m. inducida, dicha f.e.m. en función del coeficiente de inducción mutua será,

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d\left(M_{12}I_2\right)}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt} \tag{2.18}$$

Esta ecuación expresa la f.e.m. inducida en función de un parámetro global, el coeficiente de inducción mutua, y la derivada de la corriente.

Si sólo existe un circuito, la f.e.m. inducida se deberá a la corriente en el propio circuito. En este caso $\mathcal{E}$ será,

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{d\left(M_{11}I_1\right)}{dt} = -M_{11}\frac{dI_1}{dt} = -L\frac{dI_1}{dt} \tag{2.19}$$

$L$ es el coeficiente de autoinducción que hemos definido en la sección 4.3.

En general, si se supone que por la inductancia circula una corriente $I$, la f.e.m. debida a la autoinducción es,

$$\mathcal{E} = -L\,\frac{dI}{dt} \tag{2.20}$$

## 4.6. Transformador

Como colofón del presente tema vamos a estudiar el transformador eléctrico, el cual ejemplifica todos los conceptos que hemos visto en esta sección.

El transformador es un dispositivo que consta de dos circuitos que presentan una alta inductancia y están fuertemente acoplados ($|k| \lesssim 1$); a uno de ellos se le llama *circuito primario* y al otro *circuito secundario*. Pueden disponerse abrazando ambos dos secciones de un mismo circuito magnético llamado *núcleo del transformador* —formado por un material ferromagnético que idealmente debe tener alta permeabilidad, comportamiento lineal y no ser conductor— el cual transporta el flujo magnético del circuito primario al secundario con pocas pérdidas; tanto

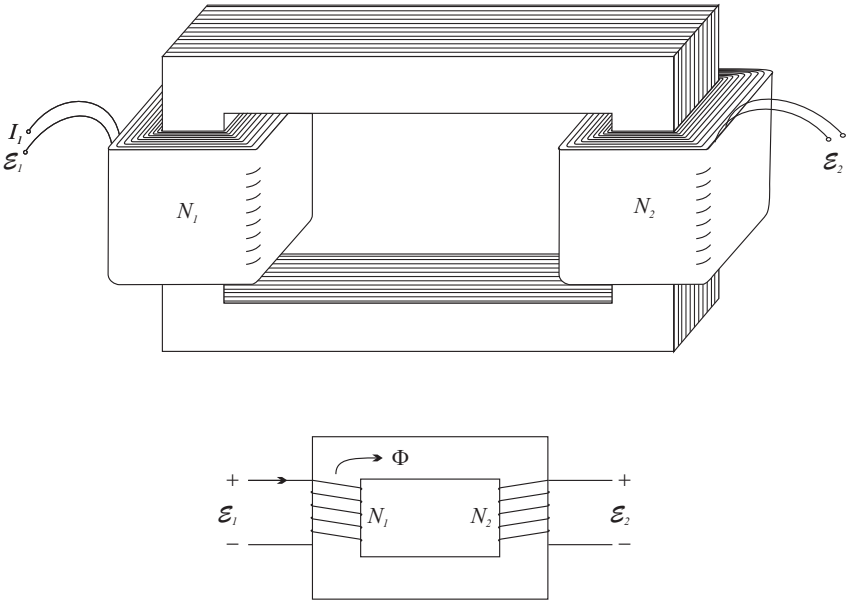



Figura 2.10

el primario como el secundario consisten en arrollamientos con muchas vueltas. Un ejemplo se muestra en la figura 2.10. También se pueden construir de forma que el arrollamiento del secundario rodee al primario, como muestra la figura 2.7, pero en cualquier caso se disponen ambos sobre un núcleo ferromagnético.

Este dispositivo se usa para modificar (*transformar*) la amplitud de fuerza electromotriz alterna que se aplica en el primario; la f.e.m. modificada se toma del secundario, como muestra la figura 2.10.

Vamos a analizar las ecuaciones que rigen este dispositivo en el caso más sencillo posible, en que aplicamos una f.e.m. variable en el primario, $\mathcal{E}_1(t)$ y mantenemos abierto el circuito secundario, o bien lo cerramos sobre una resistencia elevada de forma que la corriente que circula por éste sea muy pequeña.

En estas circunstancias podemos aplicar la 2ª Ley de Kirchhoff al circuito primario, el cual suponemos que tiene una resistencia $R$:

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I_1 R \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_1 - L_1 \frac{dI}{dt} = I_1 R$$

donde la fuerza electromotriz consta de dos términos: la f.e.m. que se aplica externamente, $\mathcal{E}_1$, y la autoinducida por el propio circuito primario, que viene dada por (2.19). Obsérvese que, puesto que no circula corriente por el secundario, no hay un término de f.e.m. por acoplamiento.

Llegados a este punto determinamos que la fuerza electromotriz aplicada es de tipo armónico, $\mathcal{E}_1(t) = (\mathcal{E}_o)_1 \cos \omega t$. Vamos a aplicar la notación fasorial[1] y suponemos que todas las magnitudes tienen la forma $A(t) = \widehat{A}\, e^{j\omega t}$ ($j = \sqrt{-1}$), donde $\widehat{A}$ es una magnitud compleja que no depende del tiempo (puede depender, eventualmente, de la frecuencia). Transformamos $\mathcal{E}_1$ y $I_1$ de esta forma y la ecuación anterior queda así:

$$\widehat{\mathcal{E}}_1 - j\omega L_1 \widehat{I}_1 = \widehat{I}_1 R \tag{2.21}$$

Ahora suponemos que el término resistivo es mucho más pequeño que el inductivo, eso es, $R \ll \omega L_1$; esto puede ser posible, bien aplicando frecuencias altas o, lo que es más común, con un circuito primario de autoinductancia muy elevada. Esto se puede llevar a la práctica con un gran número de vueltas de arrollamiento, pero esto elevaría también la resistencia del circuito por lo que es más conveniente emplear núcleos ferromagnéticos de gran permeabilidad como ya se ha dicho.

Con estas consideraciones de (2.21) obtenemos:

$$\widehat{I}_1 = \frac{1}{j\omega L_1} \widehat{\mathcal{E}}_1 \tag{2.22}$$

Veamos ahora qué ocurre en el circuito secundario. Adaptando la ecuación (2.18) al caso actual y al uso de fasores tenemos:

$$\widehat{\mathcal{E}}_2 = -j\omega M_{12} \widehat{I}_1$$

Sustituyendo (2.22):

$$\widehat{\mathcal{E}}_2 = -j\omega M_{12} \frac{1}{j\omega L_1} \widehat{\mathcal{E}}_1 = -\frac{M_{12}}{L_1} \widehat{\mathcal{E}}_1$$

A partir de (2.17) tenemos:

$$\widehat{\mathcal{E}}_2 = -k \frac{\sqrt{L_1\, L_2}}{L_1} \widehat{\mathcal{E}}_1 = -k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, \widehat{\mathcal{E}}_1$$

[1] Ver el apartado 6.1 del tema 4 y el tema 5 donde se elabora más extensamente el desarrollo en fasores.

Obsérvese que la f.e.m. del secundario es independiente de la frecuencia siempre que se cumpla la condición $R \ll \omega L_1$. Además, o bien conserva la fase del primario, o bien toma la fase opuesta dependiendo del signo del coeficiente de acoplamiento; por tanto podemos concentrarnos en las amplitudes:

$$|\widehat{\mathcal{E}}_2| = |k|\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,|\widehat{\mathcal{E}}_1| \tag{2.23}$$

En general, las autoinducctancias del primario y secundario es fácil que sigan el mismo comportamiento que la descrita en el ejercicio 2.5, por tanto $L_i = \mu N_i^2 S_i/l_i$. Supongamos que las geometrías de construcción del primario y secundario son similares, lo que implica $S_1/l_1 \simeq S_2/l_2$ y, además, el acoplamiento es óptimo, $|k| \lesssim 1$. En este caso:

$$|\widehat{\mathcal{E}}_2| \simeq \frac{N_2}{N_1}\,|\widehat{\mathcal{E}}_1| \tag{2.24}$$

que es la ecuación del transformador ideal y que muestra que la relación de amplitudes entre las f.e.m. del secundario y primario es directamente proporcional al cociente entre el número de vueltas de ambos arrollamientos.

El transformador se usa principalmente para reducir la alta tensión empleada en el transporte eléctrico a la baja tensión utilizada en el consumo final (viviendas, comercios, industrias). Basta con ajustar el número de vueltas de ambos bobinados para conseguir la reducción deseada.

## 5. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 2.1** Una espira cuadrada de lado $L$, partiendo de $A$, se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$ constante desde A hasta C, véase la figura E2.1. En el tramo marcado con símbolos $\otimes$ existe un campo magnético uniforme y perpendicular al plano en el que se mueve la espira.

- Si la espira tiene una resistencia $R$, calcular la corriente que circula por ella en función de la velocidad $\mathbf{v}$, el campo magnético $\mathbf{B} = -B_o\,\mathbf{u}_x$ y la posición en el recorrido. Dibujar la gráfica $I = I(y)$.

- Calcular la fuerza que se debe aplicar a la espira a lo largo del recorrido AC para mantener su velocidad constante. Dibujar la gráfica $\mathbf{F} = \mathbf{F}(y)$.

Suponemos despreciables los efectos debidos al campo magnético creado por la corriente que circula por la espira.

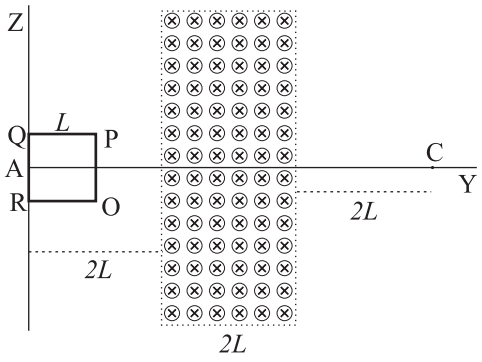



Figura E2.1

**E 2.2** En la región del espacio correspondiente a $y > 0$ existe un campo magnético cuyo vector $\mathbf{B} = B(y)\,\mathbf{u}_z$. Donde $B(y)$ varía como muestra la figura E2.2(a). Una espira cuadrada de lado $L = 1$ cm y una pequeña fisura en un lado, se mueve desde el origen hacia $y > 0$ como muestra la figura E2.1(b), con una velocidad $\mathbf{v} = v\,\mathbf{u}_y$, $v = 1\,\text{cm/s}$. El plano de la espira se mantiene perpendicular a $\mathbf{B}$.

Calcular la f.e.m. inducida en la espira y representarla gráficamente.

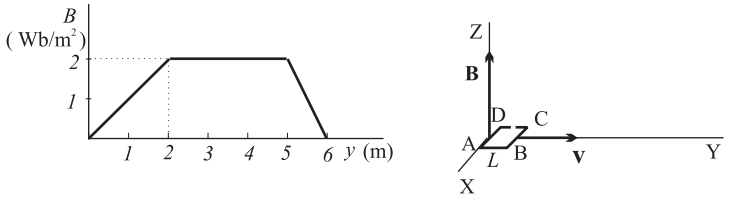



Figura E2.2

**E 2.3** Una barra conductora, se une por un extremo al eje de giro y por otro, mediante un contacto deslizante, al conductor circular de resistencia por unidad de longitud $\mathcal{R}(\Omega/\mathrm{m})$. Véase figura E2.3. La barra gira con una velocidad angular $\omega$ en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = -B_o\,\mathbf{u}_z$. Suponemos despreciable la resistencia de la barra y del tramo conductor OA. También consideramos despreciable al campo producido por la corriente inducida frente a $\mathbf{B}$.

Calcular la corriente que circula por la barra cuando se mueve de 0 a 360°.

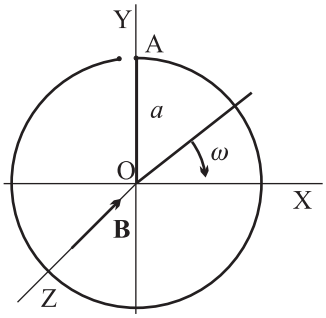



Figura E2.3

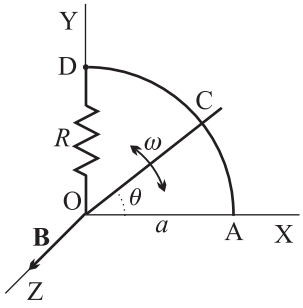



Figura E2.4

**E 2.4** En el seno de un campo magnético $\mathbf{B} = B_o\,\mathbf{u}_z$, disponemos un circuito como el indicado figura E2.4. La barra conductora C gira manteniendo fijo el punto O y barriendo en ida y vuelta el ángulo $0 - 90^o$ apoyada en el conductor circular AD. El movimiento de ida y vuelta de la barra se hace mediante un motor y en un tiempo (periodo) $T$, ($\omega = 2\pi/T$). El ángulo $\theta$ varía de acuerdo con la ecuación: $\theta = (\pi/2)\omega t$.

Suponemos despreciables la resistencia de la barra y el conductor circular. También consideramos despreciable el campo producido por la corriente inducida.

Calcular la corriente que circula por la resistencia $R$.

**E 2.5** En la figura E2.5 se muestra un dispositivo constituido por los siguientes elementos: Un conductor circular de radio $a$ y centro el origen O. Una barra

conductora L, que gira en la dirección de las agujas del reloj, centrada en O y eje de giro el Z; la barra se desliza haciendo contacto con el conductor circular. Existe una resistencia $R$ unida por un lado al centro de la barra y por otro al conductor circular. El conjunto está en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = B_o\,\mathbf{u}_z$. Suponemos despreciable el campo creado por la corriente inducida frente al campo $\mathbf{B}$. También suponemos despreciable la resistencia de los contactos y del conductor circular.

Calcular la corriente inducida que circula por la resistencia $R$. Indicar el sentido de la corriente tanto en la resistencia como en la barra.

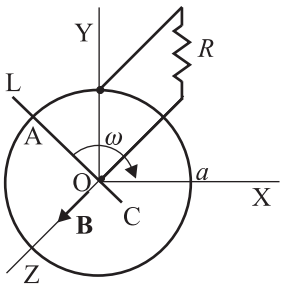



Figura E2.5

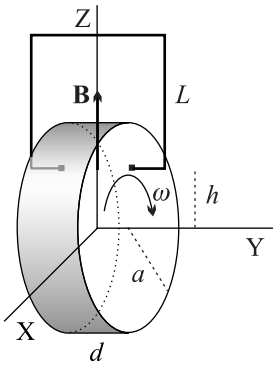



Figura E2.6

**E 2.6** Un disco conductor, de radio $a$ y espesor $d$, gira con velocidad angular $\omega$ en torno al eje y en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = B_o\,\mathbf{u}_z$. Una espira cuadrada de lado $L$ y resistencia $R$ está situada en el plano YZ como indica la figura E2.6. La espira toca al disco con unos contactos deslizantes (escobillas).

Suponemos despreciables la resistencia de los contactos y del disco. También consideramos despreciable el campo magnético producido por la corriente inducida en la espira frente a $\mathbf{B}$.

Calcular la corriente que circula por la espira.

**E 2.7** Un péndulo formado con un hilo metálico está anclado por un extremo A y unido a una masa $m$ por el otro como muestra la figura E2.7. El péndulo oscila con un periodo $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$. La oscilación se hace sobre el plano ZY y barre un ángulo de $10^o$; $l = 10$ cm y $g \cong 10$ m/s$^2$. Disponemos el péndulo en el seno de un campo magnético $\mathbf{B} = B_o\,\mathbf{u}_x$ ($B = 1$ T).

Calcular la f.e.m. inducida entre los extremos A y C.

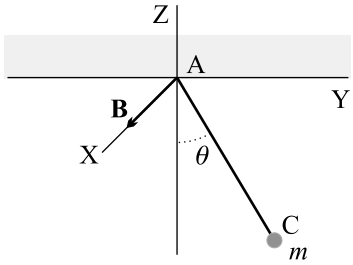



Figura E2.7

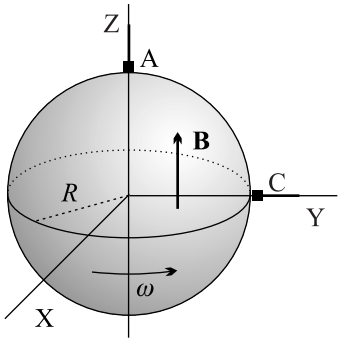



Figura E2.8

**E 2.8** Una capa esférica metálica de radio $R$, se sitúa como indica la figura E2.8 en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = B_o\,\mathbf{u}_z$. La esfera gira con velocidad angular $\omega$ en torno al eje Z.

Calcular la f.e.m. inducida entre los contactos A y C.

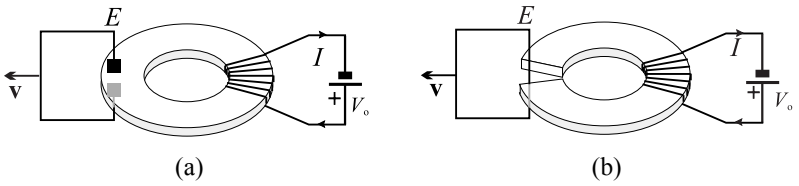



Figura E2.9

**E 2.9** Tenemos una arandela de material ferromagnético, de permeabilidad $\mu \gg \mu_o$, conductividad $\gamma$ y permitividad $\varepsilon \simeq \varepsilon_o$, cuyos radios y espesor son respectivamente, $a$, $b$ y $e$ ($e < a < b$). Sobre una parte de la arandela arrollamos $N$ espiras por las que circula una corriente $I$. El sistema se muestra en la figura E2.9(a). Suponemos que, dada la gran permeabilidad magnética de la arandela, el campo creado por las espiras se localiza dentro de la misma, es decir, no hay fugas.

- Una espira $E$, con contactos deslizantes apoyados sobre ambas caras de la arandela, se mueve radialmente con velocidad $\mathbf{v}$ hacia la izquierda. ¿Circulará corriente por la espira?

- Manteniendo fija la espira $E$, movemos el conjunto arandela, arrollamiento y pila hacia la derecha con velocidad $\mathbf{v}$. ¿Circulará ahora corriente por la espira $E$?

Practicamos una hendidura muy estrecha en la arandela como muestra la figura E2.9(b). La espira $E$ se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ hacia la izquierda. ¿Circulará corriente por ella?

**E 2.10** El dispositivo de la figura E2.10 representa una capa esférica metálica N de radio $a$, en cuyo interior hay una esfera uniformemente imanada con $\mathbf{M} = M_o\,\mathbf{u}_z$, que produce en el exterior un campo magnético $\mathbf{B}$ como muestra la figura referida. Un anillo conductor ABCD que a través de los contactos deslizantes $E$ se une a la capa N en los tres puntos indicados. Capa, esfera y anillo conductor pueden girar de forma independiente en torno al eje Z.

- Cuando giran capa y esfera con velocidad angular $\omega$ manteniendo fijo el anillo, ¿circula corriente por los tramos AB, BC y ADC?
- ¿Que ocurrirá si se mantienen fija capa y esfera y se mueve el anillo conductor?

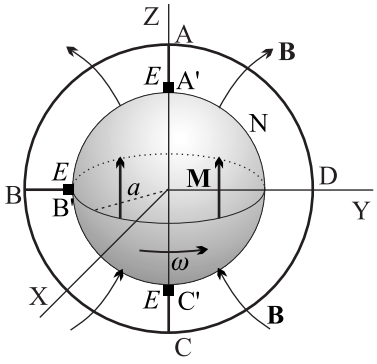



Figura E2.10

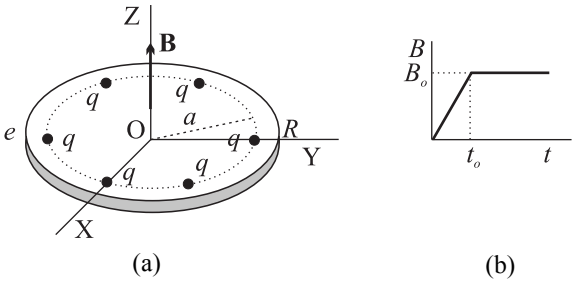



Figura E2.11

**E 2.11** Sobre un disco dieléctrico de radio $R$ y a una distancia $a$ del centro se sitúan seis esferitas, de radio despreciable frente a $R$, con una carga $q$. El momento de inercia del conjunto es $\mathcal{I}$. Todo el sistema está en el seno de un campo magnético uniforme cuya variación temporal se muestra en la figura E2.11(b).

Calcular la velocidad angular que adquiere el disco con las cargas en $t = t_o/2$ segundos.

**E 2.12** Tenemos un dispositivo formado por dos espiras circulares y coplanares, cuyos radios respectivos son $a$ y $b$. El generador G indicado figura E2.12 mantiene una corriente $I_b = I_o \operatorname{sen} \omega t$ en la espira de radio $b$. La espira de radio $a$ tiene

una resistencia $R$ y coeficiente de autoinducción $L$. Suponemos que el campo magnético $B$ en el círculo de radio $a$ es prácticamente el mismo que en centro de la espira.

Calcular la corriente que circula por la espira de radio $a$.

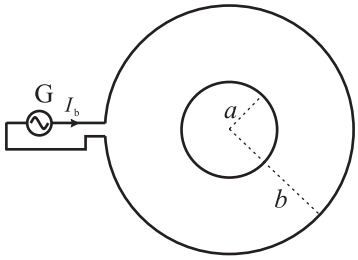



Figura E2.12

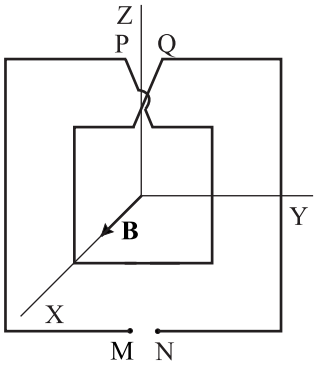



Figura E2.13

**E 2.13** Dos espiras cuadradas cuyos lados respectivos son $L$ y $2L$, están conectadas como muestra la figura E2.13. El sistema está en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = B_o\,\mathbf{u}_x$. Las espiras giran solidariamente con velocidad angular $\omega$ en torno al eje Z.

Calcular la f.e.m. inducida que podemos observar entre los puntos MN.

**E 2.14** Tenemos dos espiras $L_1$ y $L_2$ circulares de radio $a$ y dispuestas como indica la figura E2.14. Centrada en el origen y sobre un plano que forma un ángulo de 45° con el eje Y se sitúa una espira cuadrada de lado $0,1\,a$, con una fina hendidura en uno de sus lados.

- Por las espiras $L_1$ y $L_2$ circula una corriente $I = I_o \operatorname{sen}\omega t$, ¿cual será la f.e.m. inducida en la espira cuadrada?

- Si por la espira $L_1$ circula una corriente $I_1 = I_o \cos\omega t$ y por la $L_2$ otra $I_2 = I_o \operatorname{sen}\omega t$, ¿cual será la f.e.m. inducida en la espira cuadrada?

Suponemos que el campo magnético sobre toda la espira cuadrada es el mismo que crean $L_1$ y $L_2$ en el centro O.

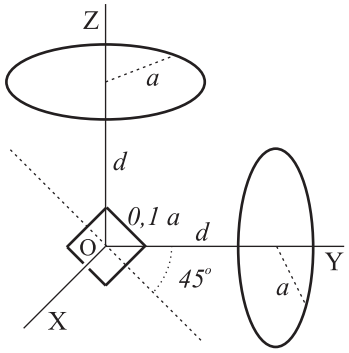



Figura E2.14

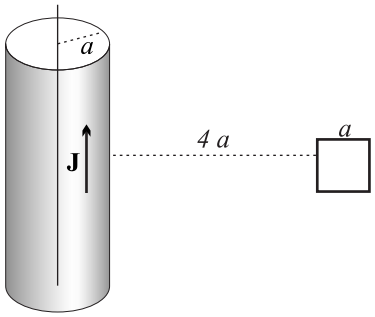



Figura E2.15

**E 2.15** Por el conductor rectilíneo e indefinido de radio $a$ indicado en la figura E2.15 circula una corriente cuya densidad es $\mathbf{J} = J\rho^2\mathbf{u}_z$. Calcular el coeficiente de inducción mutua entre el conductor y la espira cuadrada de lado $a$, situada a una distancia $5a$ del eje.

**E 2.16** Un disco conductor de radio $R$, espesor $h$ ($h << R$) y conductividad $\gamma$, se sitúa en presencia de un campo magnético alterno $\mathbf{B} = B_o \operatorname{sen}\omega t\, \mathbf{u}_z$, uniforme y paralelo al eje del disco.

Calcular la densidad de corriente inducida en función de la distancia al eje del disco. Indicar su dirección y sentido.

**E 2.17** Calcular el coeficiente de inducción mutua entre un conductor rectilíneo e indefinido en la dirección del eje X, cuya sección transversal se muestra en la figura E2.17, y una espira cuadrada, de lado $L = R$, situada como indica la figura.

La corriente circula por la zona sombreada, el resto es hueco de sección circular y radio $R/2$.

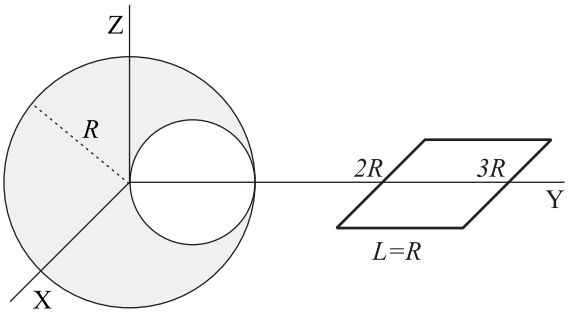



Figura E2.17

Tema 3

# ENERGÍA MAGNÉTICA

## RESUMEN

### Objetivos generales

El objeto de este tema es introducir el concepto de energía magnética en el caso de corrientes cuasi-estacionarias, y calcular las fuerzas entre sistemas a partir de la energía magnética.

### Objetivos específicos

- Energía magnética debida a un sistema de corrientes.
- Energía magnética en función de los vectores de campo magnético.
- Energía magnética en medios no lineales.
- Cálculo del coeficiente de autoinducción mediante la energía magnética.
- Fuerza y par de fuerzas en el caso de mantener la corriente constante en los circuitos.
- Fuerza y par de fuerzas cuando se mantiene el flujo constante en los circuitos.
- Presión magnética en la superficie de separación entre dos medios.

### Requisitos previos

Manejar los conceptos requeridos para los temas 1 y 2 así como los desarrollados en éstos y también los conceptos de energía y trabajo.

## INTRODUCCIÓN

En electrostática se define la energía como el trabajo necesario para disponer un conjunto de cargas o distribuciones continuas de carga. En magnetostática es posible hacer una definición similar para las disposiciones de corrientes. En este tema vamos a proceder de una forma análoga a la que se lleva a cabo en electrostática para calcular la energía magnética. Hasta que las corrientes alcanzan su valor final, tanto los cambios de posición de los circuitos como las variaciones de corriente, llevan asociada una fuerza electromotriz, por tanto debemos tenerla en cuenta para calcular la energía final del sistema. También utilizaremos las relaciones entre campos y corrientes para expresar la energía magnética en función de los vectores de campo.

## 1. ENERGÍA MAGNÉTICA

La energía magnética debida a un circuito filiforme por el que circula una corriente $I$, es igual al trabajo necesario para establecer la corriente $I$ en dicho circuito, excluida la pérdida de energía por efecto Joule.

Durante el proceso de transición hasta alcanzar la corriente final en cada circuito se generan campos magnéticos variables con el tiempo y por tanto se inducen fuerzas electromotrices que se deben tener en cuenta para calcular la energía magnética.

Para encontrar la expresión de la energía magnética vamos a suponer una serie de condiciones que permitan cierta simplificación. En primer lugar suponemos que el proceso se realiza en condiciones cuasi-estáticas, es decir, corrientes lentamente variables; con lo cual los fenómenos de radiación y retraso de unos potenciales con respecto a otros en distintos puntos de un componente son despreciables. También se consideran los circuitos no deformables y en posiciones fijas, siendo la sección de los conductores muy pequeña en comparación con su longitud. Además consideramos que los medios son lineales.

El cálculo se hace suponiendo corrientes de conducción en los circuitos y determinando el trabajo reversible necesario para que las corrientes pasen desde cero a su valor final. Se excluye la energía disipada por efecto Joule en los conductores. Suponemos que la energía se suministra por unas baterías conectadas a los distintos conductores, baterías que consideramos elementos externos al sistema.

En un circuito filiforme $C_i$ por el que circula una corriente $i$, el trabajo realizado para mover la carga $dq$ entre dos puntos cuya d.d.p. es $V_i$ será,

$$V_i\, dq = V_i\, i_i dt$$

En el intervalo de tiempo $dt$ la energía suministrada por las baterías es,

$$dW_i = V_i\, i_i\, dt$$

Si se trata de un circuito de resistencia $R$,

$$V_i + \mathcal{E}_i = R\, i_i$$

Es decir, la f.e.m. de la batería más la inducida $\mathcal{E}_i$ es igual a $Ri_i$. Despejando $V_i$ y llevándola a la ecuación de la energía queda,

$$dW_i = -\mathcal{E}_i i_i\, dt + R\, i_i^2 dt$$

El término $Ri_i^2 dt$ representa la energía disipada por efecto Joule y no forma parte del trabajo reversible. Por tanto si tenemos en cuenta la relación, $\mathcal{E}_i = -d\Phi_i/dt$, la energía magnética elemental $dW_{mi}$ será,

$$dW_{mi} = i_i d\Phi_i \tag{3.1}$$

En un sistema de $N$ circuitos,

$$dW_m = \sum_{i=1}^{N} i_i d\Phi_i \tag{3.2}$$

En un sistema lineal los valores de la corriente y flujo se puede expresar en función de sus valores finales a través de una relación lineal de la forma $f(t) = \alpha F$. La **energía magnética** en función de flujos y corrientes, suponiendo la variación de corriente $i_i = \alpha I_i$ y para el flujo en un medio lineal $d\Phi_i = \Phi_i\, d\alpha$ es,

$$dW_m = \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i \alpha d\alpha$$

Integrando entre 0 y 1 tendremos,

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} I_i \Phi_i \tag{3.3}$$

Como el flujo sobre el circuito $i$ depende del propio circuito y de todos los demás, el citado flujo en función de los coeficientes de inducción mutua y autoinducción será,

$$\Phi_i = \sum_{i=1}^{N} M_{ij} I_j \tag{3.4}$$

Sustituyendo la ecuación (3.4) en (3.3) obtenemos la siguiente fórmula para la energía en función de los coeficientes de inducción,

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} M_{ij} I_i I_j \tag{3.5}$$

El término $i = j$ corresponde a $M_{ii} = L_i$.

En el caso de un circuito aislado con inductancia $L$, únicamente existe el término $M_{ii} = L$ y $I_i \cdot I_i = I^2$ , por tanto la energía magnética será de la forma,

$$W_m = \frac{1}{2} L\, I^2 \tag{3.6}$$

## 2. ENERGÍA EN FUNCIÓN DE B Y H

Nos interesa expresar la energía magnética en función del campo e intensidad de campo magnético, ya que esta forma sigue la línea de expresar las leyes que describen los fenómenos electromagnéticos mediante los vectores de campo. Esto nos permite encontrar la energía en el caso de distribuciones de corriente no localizadas en circuitos filiformes.

En un sistema por el que circula una corriente cuasi-estacionaria cuya densidad es $\mathbf{J}$ y que tiene una conductividad $\gamma$, si se le aplica un generador que produce un campo no conservativo $\mathbf{E}'$,

$$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E}' + \mathbf{E}) \tag{3.7}$$

Despejando $\mathbf{E}'$,

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\gamma}\mathbf{J} - \mathbf{E}$$

Multiplicando los dos miembros por $\mathbf{J}dv$ e integrando sobre el volumen por el que circula la corriente $\mathbf{J}$ tendremos,

$$\int_V \mathbf{E}' \cdot \mathbf{J} dv = \frac{1}{\gamma} \int_V J^2 dv - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \tag{3.8}$$

El primer miembro representa la potencia (energía por unidad de tiempo) suministrada por el generador o generadores y el segundo tiene dos componentes. El primero representa la potencia disipada por efecto Joule en el sistema, y el segundo, como veremos a continuación, la variación con el tiempo de la energía magnética almacenada en el volumen $V$. El volumen de integración es todo el espacio, ya que fuera de los conductores $\mathbf{J} = 0$.

Podemos transformar el segundo término utilizando la relación entre $\mathbf{J}$ y $\mathbf{H}$ que proporciona el teorema de Ampère, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Sustituyendo tendremos,

$$-\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = -\int_V (\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}) dv$$

Teniendo en cuenta la relación vectorial siguiente,

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$-\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = -\int_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dv + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv$$

Aplicando el teorema de Gauss al segundo término del segundo miembro de la relación anterior y utilizando la ley de Faraday expresada por $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, la relación queda de la forma siguiente,

$$-\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

Donde $S$ es la superficie que limita el volumen $V$.

En el caso de campos cuasi estáticos los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ decaen con la distancia en forma proporcional a $1/r^2$, es decir, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ lo hará, al menos, proporcionalmente a $1/r^4$. Como $ds$ aumenta de forma proporcional a $r^2$, cuando $r \to \infty$ la integral de superficie se anula. Esto no ocurre cuando los campos se deben a cargas aceleradas, ya que tiene lugar la radiación electromagnética cuyos a campos decaen proporcionalmente a $1/r$. Esto lo veremos en el tema 8 dedicado al estudio de la radiación electromagnética.

Teniendo en cuenta estas consideraciones la ecuación (3.8) queda de la forma siguiente:

$$\int_V \mathbf{E}' \cdot \mathbf{J} dv = \frac{1}{\gamma} \int_V J^2 dv + \int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv \tag{3.9}$$

Como dijimos antes, el primer término del segundo miembro representa la potencia disipada en el conductor por efecto Joule; es decir, la potencia que se

transforma en térmica. Y el segundo término es la energía por unidad de tiempo transferida al campo magnético generado por la corriente.

El incremento en la energía del campo magnético en un intervalo de tiempo $\delta t$ será,

$$\delta W_m = \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dv \tag{3.10}$$

Para calcular la integral anterior debemos conocer la relación que existe entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$. Esta relación depende del medio donde se considera la variación de energía; o de otra forma, de cómo se pasa del valor cero al valor final del campo. La ecuación(3.10) en forma integral se expresa de la siguiente forma:

$$W_m = \int_V \left( \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dv \tag{3.11}$$

En el caso de un medio lineal $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, con $\mu$ constante, por tanto,

$$W_m = \int_V \left( \int_0^H \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} \right) dv$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \tag{3.12}$$

Aunque la ecuación (3.12) es válida cuando se integra sobre todo el espacio, pues representa el trabajo total realizado para establecer el campo magnético final, se puede introducir el concepto de densidad de energía magnética $w_m$ mediante la ecuación de definición siguiente,

$$w_m = \frac{dW_m}{dv} = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tag{3.13}$$

En un medio lineal,

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu^{-1} B^2 \tag{3.14}$$

La densidad de energía se mide en $\mathrm{J/m^3}$.

Conocer la distribución permite simplificar los cálculos suprimiendo las zonas donde el campo magnético es nulo. Además si hay zonas con medios de distintas características, la energía se calcula con los parámetros que corresponden a cada

medio. En el caso de un medio no lineal la integral de la ecuación (3.13) se hace teniendo en cuenta la relación funcional que existe entre los dos vectores en el medio considerado.

Conocida $w_m$,

$$W_m = \int_V w_m dv \tag{3.15}$$

Para medios lineales podemos expresar la ecuación (3.12) en función de la corriente y el potencial vector magnético. Para ello tenemos en cuenta que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, y aplicamos la relación vectorial (C.40):

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\frac{1}{2}\int_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} dv - \frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia vemos que el segundo término se anula,

$$\frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dv = \frac{1}{2}\int_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$$

Efectivamente el potencial vector disminuye con la distancia a las fuentes de forma proporcional a $1/r$ y $H \propto 1/r^2$, por lo que el producto decrece al menos proporcionalmente a $1/r^3$. Sin embargo la superficie crece de forma proporcional a $r^2$, en consecuencia la integral tiende a cero cuando $r \to \infty$.

Cómo $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, la forma que adopta la energía en función de la corriente y el potencial vector es:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dv \tag{3.16}$$

La expresión anterior es análoga a la energía obtenida en el campo electrostático en función de la densidad de carga y el potencial eléctrico.

## 3. ENERGÍA EN MEDIOS NO LINEALES

Si un circuito contiene un medio no lineal, bien porque el circuito sea un conjunto de espiras arrolladas a un núcleo de material no lineal (por ejemplo ferromagnético), o bien porque el conductor sea de material no lineal, en el cálculo de la energía magnética se debe tener en cuenta la curva de imanación. Dicha curva nos permite obtener los incrementos de campo magnético correspondientes

a cambios en la intensidad de campo magnético **H** originados por el incremento de la corriente.

Considerando la no linealidad del material, a un incremento del campo le corresponde la variación de energía siguiente,

$$\delta W_m = \int_V \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}\, dv$$

El incremento en la densidad de energía será,

$$\delta w_m = \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}$$

Si el material describe la curva de imanación indicada en la figura 3.1, la variación de la densidad de energía cuando el campo magnético $B$ cambia de 0 a $B_o$ es,

$$w_m = \int_0^{B_o} \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B}$$

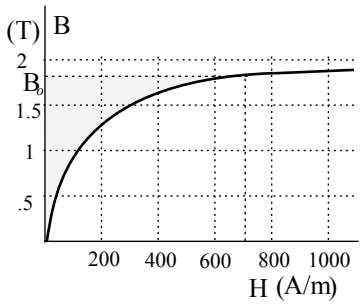



Figura 3.1

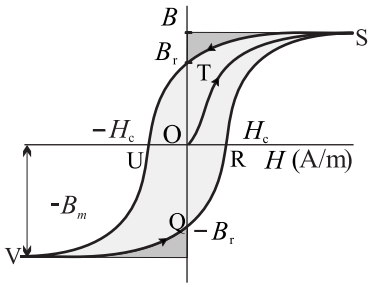



Figura 3.2

La integral anterior es igual al área sombreada limitada por el eje, la recta $B(H) = B$ y la curva de imanación (véase la figura 3.1).

Si el sistema describe un ciclo de histéresis como el indicado en la figura 3.2, la energía disipada por unidad de volumen en cada ciclo viene dada por la ecuación siguiente,

$$w_m = \oint_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \tag{3.17}$$

Considerando que $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$,

$$H\, dB = \mu_o H\, dH + \mu_o H dM$$

El término $\mu_o H\, dH$ corresponde al trabajo en el vacío y se anula al describir un ciclo. En consecuencia,

$$w_m = \mu_o \oint_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \tag{3.18}$$

Tanto esta ecuación como la (3.17) nos proporcionan la energía por unidad de volumen disipada al describir un ciclo de histéresis. Esta energía se representa por el área sombreada limitada por el ciclo de histéresis que muestra la figura 3.2.

Para explicar de forma cualitativa lo que ocurre en un ciclo procedemos de la forma siguiente: Partimos del punto Q del ciclo donde la intensidad de campo magnético es cero y $B$, por efecto del retraso, todavía es negativo. Pasamos de Q a S por el punto R incrementando $H$ y $B$. La energía suministrada, que se calcula mediante la ecuación (3.17) entre los límites para $H$ y $B$, corresponde al área limitada por la curva inferior del ciclo, el eje Y (eje del campo $B$) y la recta paralela al eje horizontal; es decir, el área más oscura de la parte superior más el área sombreada que corresponde a valores de $H$ positivos.

Una vez alcanzada la saturación disminuimos la intensidad de campo hasta que $H = 0$; es decir, pasamos desde el punto S hasta el T. Ahora el campo devuelve energía a la fuente en la proporción determinada por la integral, que en este caso está representada por el área más oscura del primer cuadrante. Vemos que la energía devuelta es menor que la suministrada.

Procediendo de forma análoga en el tramo TUVQ obtenemos la energía no devuelta, que es la correspondiente a la parte sombreada interior al ciclo de histéresis en la zona de $H < 0$.

Al recorrer el ciclo se disipa una energía en el material que es proporcional al área limitada por el ciclo. Esta energía se transforma en calor, lo que provoca un aumento de temperatura en dicho material. Esta pérdida de energía se conoce como *pérdida por histéresis* y se debe a una especie de fricción entre los dominios (zonas imanadas en una misma dirección) al cambiar la orientación de la imanación.

Este fenómeno explica el calentamiento de un material ferromagnético cuando se le aplica una corriente alterna; ya que dicha corriente determina que el material describa el ciclo de histéresis tantas veces por segundo como indica la frecuencia de la tensión aplicada.

## 4. COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN

Como indicábamos en el apartado 4.2, dedicado a obtener la fórmula de Neumann, algunas veces es difícil hacer uso de ella para obtener el coeficiente de autoinducción, por lo que debemos recurrir a otro procedimiento para determinarlo.

La energía en el caso de un circuito filiforme viene dada por la ecuación (3.6),

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Considerando que el medio es lineal, la corriente cuasi-estática y el conductor cerrado, los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ son proporcionales a la corriente $I$, siendo $I$ la misma para todas las zonas, tanto dentro como fuera del conductor. La relación anterior nos permite definir el coeficiente de autoinducción a partir de la energía magnética, con la particularidad de que dicha energía magnética la calculamos mediante la relación (3.12), es decir, en función de los vectores de campo.

*Se define el coeficiente de autoinducción mediante la relación siguiente,*

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \tag{3.19}$$

En un conductor de dimensión finita la energía $W_m$ es la suma de la almacenada dentro y fuera del conductor,

$$W_m = W_{mi} + W_{me}$$

Dada esta circunstancia podemos representar $L$ como suma del coeficiente de autoinducción interno $L_i$ y externo $L_e$,

$$L = L_i + L_e \tag{3.20}$$

Con,

$$L_i = \frac{1}{I^2} \int_{V_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv_i \tag{3.21}$$

$$L_e = \frac{1}{I^2} \int_{V_e} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv_e \tag{3.22}$$

Tanto el coeficiente de autoinducción interno como externo no son fáciles de calcular, salvo que la geometría del sistema o distribución de corriente presente ciertas simetrías que lo faciliten.

En el caso de un conductor cilíndrico indefinido de radio $a$ podemos calcular el coeficiente de autoinducción interno de la forma siguiente: suponemos que la densidad de corriente es uniforme en el interior del conductor. Aplicando el teorema de Ampère el campo magnético en el interior del conductor es:

$$B_i = \frac{\mu I}{2\pi a^2}\rho \quad \text{para} \quad \rho < a$$

Como para un longitud $l$ el volumen elemental es $dv_i = 2\pi\rho\, l d\rho$, y los límites de integración para $\rho$ son 0 y $a$,

$$\int_{V_i} \mathbf{B}\cdot\mathbf{H} dv_i = \int_0^a \frac{\mu I^2}{4\pi^2 a^4}\rho^2 2\pi\rho\, l d\rho = \frac{\mu l}{8\pi} I^2$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.21) el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud será:

$$\frac{L_i}{l} = \frac{\mu}{8\pi} \tag{3.23}$$

Vemos que dicho coeficiente no depende del radio del conductor. Esto sucede para corrientes cuasi-estacionarias, es decir, de frecuencia muy baja. Para corrientes de frecuencia elevada la distribución de corriente dentro del conductor no es uniforme, y por tanto el campo magnético no varía linealmente con el radio dentro del conductor. La energía no será la misma que hemos calculado en este ejemplo.

**Ejercicio de autoevaluación 3.1**

Un cable coaxial, cuya sección transversal se muestra en la figura 3.3, está lleno de un material de permeabilidad $\mu$ y permitividad $\varepsilon_o$. Suponemos despreciable el espesor del conductor exterior.

Utilizando la definición de coeficiente de autoinducción en función de la energía, calcular dicho coeficiente por unidad de longitud.

**Solución**

Para resolver este problema utilizamos la relación entre el coeficiente de autoinducción y la energía magnética dados por las ecuaciones (3.21) y (3.22). Suponemos que por el cilindro conductor central circula una corriente $I$ uniformemente distribuida; además, como ocurre en los cables coaxiales, hay una corriente de retorno $-I$ que circula por el conductor exterior.

Para $\rho \leq R_1$ la autoinducción del cilindro central, $L_i$, viene dada por la

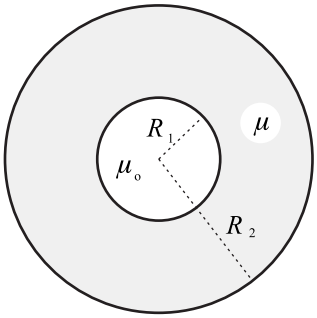



Figura 3.3. Cable coaxial del ejemplo 3.1

fórmula (3.23) según hemos visto en esta sección:

$$\frac{L_i}{l} = \frac{\mu_o}{8\pi}$$

Para $R_1 \leq \rho \leq R_2$, la aplicación de teorema de Ampère produce,

$$\oint_C \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_{\varphi 2} \;\; ; \;\; \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\,\mathbf{u}_\varphi$$

y por tanto el coeficiente externo, $L_e$, es,

$$L_e = \frac{W_{m2}}{I^2} = \frac{1}{I^2}\int_V \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{B}_2 dv = \frac{1}{I^2}\int_{R_1}^{R_2} \mu \left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 l 2\pi\rho\, d\rho$$

$$L_e = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Dividiendo por $l$ obtenemos,

$$\frac{L_e}{l} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

En el exterior tenemos que la corriente encerrada es nula, puesto que la corriente del conductor central se compensa con la que circula exteriormente

en sentido opuesto:

$$\oint_C \mathbf{H}_3 \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\mathbf{H}_3 = 0$$

y por tanto $L'_e = 0$. Finalmente el coeficiente total por unidad de longitud se obtiene sumando los coeficientes anteriores:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_o}{8\pi} + \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

## 5. FUERZA Y PAR DE FUERZAS

En este apartado vamos a estudiar un procedimiento para obtener la fuerza magnética basado en el *desplazamiento virtual* del circuito o elemento sobre el que actúa la fuerza. Este método utiliza el principio de conservación de la energía y se puede aplicar a un sistema rígido o a un conjunto de elementos que se mantienen estables si actúan además fuerzas de naturaleza mecánica. Este procedimiento permite abordar casos difíciles de resolver utilizando los otros métodos.

En los apartados siguientes suponemos que se trata de medios lineales, por tanto no hay pérdidas por calentamiento del material debido a los fenómenos de rozamiento interno. Tampoco consideramos la disipación de energía debida al efecto Joule.

La demostración se hará en el caso de circuitos filiformes, pero los resultados son los mismos si se utilizan las expresiones para la energía en función de los vectores de campo.

En un desplazamiento virtual la energía suministrada por las fuentes, $dW_b$, es igual al trabajo mecánico $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ más la variación de energía magnética del sistema $dW_m$,

$$dW_b = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + dW_m \tag{3.24}$$

Se consideran dos casos: 1) Sistemas o circuitos en los que se mantiene constante la corriente. 2) Sistemas en los que se mantiene constante el flujo.

## 5.1. Sistemas o circuitos con corriente constante

En este caso las baterías suministran energía de forma que durante el desplazamiento $d\mathbf{l}$ se mantienen constantes las corrientes en los circuitos. La variación de flujo que se produce durante el desplazamiento, teniendo en cuenta la ecuación (3.2) y que se mantiene constante la corriente, tiene como consecuencia el siguiente aporte de energía por las baterías,

$$dW_b = \sum_1^N I_i d\Phi_i \tag{3.25}$$

Por otra parte el trabajo mecánico es,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.26}$$

La variación de la energía magnética, considerando la ecuación (3.3) y que la corriente permanece fija, será,

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_1^N I_i d\Phi_i \tag{3.27}$$

Sustituyendo (3.25), (3.26) y (3.27) en (3.24) tenemos,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = dW_m \tag{3.28}$$

Como la variación de energía la podemos expresar en función del gradiente, $dW_m = \nabla W_m \cdot d\mathbf{l}$,

$$\mathbf{F} = (\nabla W_m)_I \tag{3.29}$$

*La fuerza es igual al gradiente de la energía.* El subíndice $I$ significa que en el desplazamiento virtual se mantiene la corriente constante.

Si el sistema sólo puede girar alrededor de un eje, que suponemos coincide con el eje Z, el **par de fuerzas** será,

$$T_z = \left( \frac{\partial W_m}{\partial \varphi} \right)_I \tag{3.30}$$

Estas relaciones entre fuerza y energía indican que la fuerza que actúa sobre el sistema tiende a incrementar la energía magnética, y como consecuencia de la

ecuación (3.27) se incrementará el flujo a través de los conductores. Por ejemplo, en el caso de una espira el par de fuerzas en un campo uniforme tenderá a orientar la espira de forma que el flujo que la atraviesa sea máximo; es decir, se orientará de manera que la normal a su superficie coincida con la dirección del campo. La misma consideración se puede aplicar a sistemas con inducción mutua y autoinducción; las expresiones (3.5) y (3.6) ponen de manifiesto que, manteniendo constante la corriente, a un aumento de energía corresponde un incremento de los coeficientes de autoinducción o inducción mutua.

## 5.2. Sistemas o circuitos con flujo constante

Ahora durante el desplazamiento virtual suponemos que las corrientes se modifican de manera que los flujos permanezcan constantes. Como consecuencia del flujo constante, la f.e.m. inducida es nula. Las baterías no suministrarán más energía que la disipada por efecto Joule, es decir, $dW_b = 0$.

La ecuación (3.24) ahora queda de la forma,

$$dW + dW_m = 0$$

En consecuencia el trabajo mecánico realizado en el desplazamiento virtual es igual a la variación de la energía magnética con signo menos,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -dW_m$$

Considerando el gradiente,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\nabla W_m \cdot d\mathbf{l}$$

por tanto,

$$\mathbf{F} = -\left(\nabla W_m\right)_\Phi \tag{3.31}$$

*El trabajo mecánico en este caso se hace a costa de la disminución de la energía magnética del sistema.* El subíndice $\Phi$ indica que el desplazamiento se realiza manteniendo el flujo constante.

De forma análoga al caso anterior, el par de fuerzas es,

$$T_z = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial \varphi}\right)_\Phi \tag{3.32}$$

**Ejercicio de autoevaluación 3.2**

En un cable coaxial en forma de U con las partes rectas muy largas. Se introduce mercurio, cuya permeabilidad es $\mu \simeq \mu_o$, como indica la figura 3.4. Se conectan los dos conductores del cable coaxial a una batería de forma que circule por ellos una corriente constante $I$. Suponemos que la conductividad de los conductores que forman el cable coaxial es mucho menor que la del mercurio.

Calcular la diferencia de alturas entre las dos ramas de la U cuando pasa la corriente $I$ por el cable coaxial.

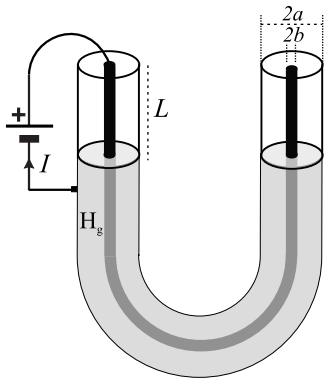



Figura 3.4. Cable coaxial del ejemplo 3.2

**Solución**

El peso de la columna de mercurio cuya altura $h$ es igual a la diferencia entre las alturas que alcanzan las dos ramas; en el equilibrio es igual a la fuerza magnética sobre el mercurio. Como la corriente permanece constante, la fuerza se calcula mediante la ecuación (3.29).

Cuando suponemos la conductividad del mercurio mucho mayor que la del conductor coaxial estamos simplificando el problema, dado que en estas condiciones se puede hacer la hipótesis de que toda la corriente entre los dos conductores se cierra a través de una capa muy fina de mercurio al borde entre mercurio y vacío; de no ser así deberíamos conocer la forma de la distribución

de la corriente en el mercurio entre los dos conductores. También suponemos que la permeabilidad del mercurio es prácticamente igual a $\mu_o$.

La aplicación del teorema de Ampère nos permite calcular el campo magnético entre los dos conductores, dicho campo es,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{u}_\varphi$$

La variación de energía magnética debida a un desplazamiento $dz$ de la columna de mercurio en el brazo izquierdo es,

$$dW_m = \frac{1}{2}\int_a^b \mu_o \left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 (L+dz)2\pi\rho d\rho - \frac{1}{2}\int_a^b \mu_o \left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 L\, 2\pi\rho d\rho$$

$$dW_m = \mu_o \frac{I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) dz$$

La fuerza magnética será:

$$F = \frac{dW_m}{dz} = \mu_o \frac{I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Igualando esta fuerza con el peso de la columna de mercurio obtenemos $h$, que es la diferencia entre la altura de las dos columnas. Si la densidad del mercurio es $\rho_{\mathrm{Hg}}$ y la aceleración de la gravedad $g$, tenemos,

$$\rho_{\mathrm{Hg}}\, gh\, \pi(b^2 - a^2) = \mu_o \frac{I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

De donde la altura $h$ será:

$$h = \frac{\mu_o I^2}{4\pi^2 \rho_{\mathrm{Hg}}\, g(b^2 - a^2)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

## 6. PRESIÓN MAGNÉTICA

Para calcular la presión magnética sobre una superficie en la que se produce una discontinuidad del campo magnético, vamos a estudiar el ejemplo de dos

placas conductoras planas, paralelas e indefinidas, situadas como muestra la figura 3.5. Por cada placa circula una densidad de corriente superficial $\mathbf{K}$ en los sentidos indicados en la figura.

Aplicando el teorema de Ampère, el campo magnético entre las placas es $\mathbf{B} = \mu_o K \mathbf{u}_x$; es decir, $\mathbf{B}$ es perpendicular a las densidades de corriente $\mathbf{K}$. La fuerza sobre cada placa es perpendicular a ella, $\mathbf{F} \propto \mathbf{K} \times \mathbf{B}$. Podemos calcular $\mathbf{F}$ a partir de $W_m$.

La energía magnética en un paralelepípedo de base $dx\,dy$, altura $dz$ es,

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o} dx\,dy\,dz$$

Dado que la corriente se mantiene constante,

$$F = \frac{dW_m}{dz} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o} dx\,dy$$

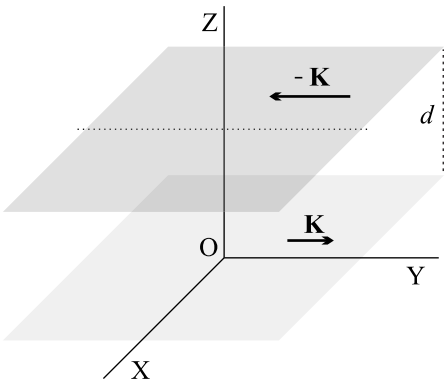



Figura 3.5

La presión $p$ sobre una superficie $dx\,dy$ será,

$$p = \frac{F}{dx\,dy} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o} \tag{3.33}$$

La presión en el ejemplo estudiado coincide con la densidad de energía magnética entre las placas, ya que en el exterior $B = 0$.

Para obtener de una forma general la presión en la superficie que limita dos medios de distinta permeabilidad vamos a utilizar el método del desplazamiento virtual.

En un desplazamiento virtual $d\mathbf{l}$ de la superficie elemental $d\mathbf{s}$ de separación entre los medios la variación de energía magnética será,

$$dW_m = \frac{1}{2}\mu_2 H^2(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{l}) - \frac{1}{2}\mu_1 H^2(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{l})$$

Debemos distinguir dos casos: 1) Cuando los campos son paralelos a la superficie de separación entre los medios y 2) en el caso de que sean perpendiculares.

En el primer caso las condiciones en los límites determinan que se conservan las componentes tangenciales de $\mathbf{H}$, $H_{t1} = H_{t2} = H_t$. Se trata de un desplazamiento en el que se mantiene la corriente constante[1], por tanto se aplica la relación:

$$(dF)_I = \frac{dW_m}{dl} = \frac{1}{2}\mu_2 H_t^2 ds - \frac{1}{2}\mu_1 H_t^2 ds = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)H_t^2 ds$$

La presión será,

$$p_I = \left(\frac{dF}{ds}\right)_I = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)H_t^2 \tag{3.34}$$

En el segundo caso, cuando los campos son perpendiculares a la superficie de separación, las condiciones en los límites determinan que las componentes normales de $\mathbf{B}$ son continuas, $B_{n2} = B_{n1} = B_n$. Ahora el desplazamiento virtual se hace manteniendo el flujo constante[2]; es decir, se aplica la relación:

$$(dF)_\Phi = -\frac{dW_m}{dl} = -\frac{1}{2}\left(\frac{B_n^2}{\mu_2} - \frac{B_n^2}{\mu_1}\right)ds = \frac{1}{2}B_n^2\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2\mu_1}ds$$

La presión en este caso será,

$$p_\Phi = \left(\frac{dF}{ds}\right)_\Phi = \frac{1}{2}B_n^2\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2\mu_1} \tag{3.35}$$

En un caso general, cuando los campos formen un ángulo con la tangente y normal a la superficie de separación, la presión es una combinación lineal de las

[1] Esto se entenderá mejor en el ejemplo que sigue al final de la sección.
[2] Ver nota anterior.

dos anteriores, es decir, sumando y realizando operaciones,

$$p = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)\left(H_t^2 + B_n^2 \frac{1}{\mu_2 \mu_1}\right) \tag{3.36}$$

Donde $H_t$ es la componente tangencial de la intensidad de campo y $B_n$ la normal del campo magnético en la superficie de separación de los dos medios.

La presión se dirige del medio dos al uno.

### *Ejemplo sobre el cálculo de la presión magnética*

En la sección 1 se calcula la energía magnética y se tiene en cuenta que varía tanto los flujos que atraviesan los circuitos como las corrientes que los recorren. En la sección 5 se estudian las fuerzas en dos casos, uno cuando se mantiene la corriente constante y otro cuando es el flujo el que permanece constante. En esta sección se aplican los casos anteriores al estudio de la presión magnética. Vamos a realizar un ejercicio que aclare esta aplicación.

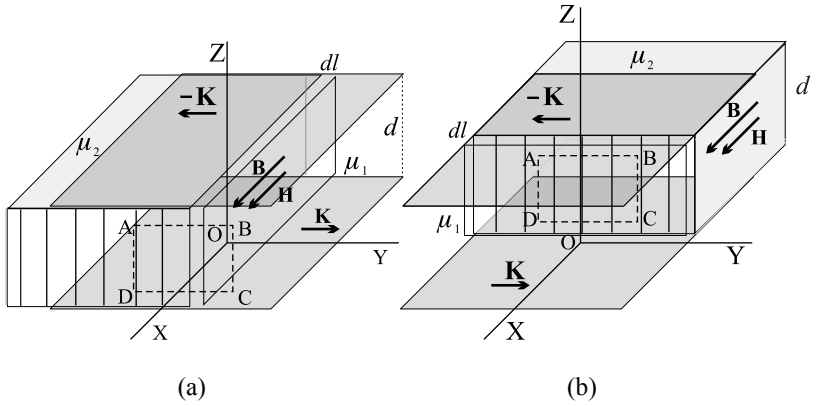



Figura 3.6

Utilizamos el sistema formado por dos planos indefinidos que muestra la figura 3.5 y suponemos que se introduce una placa de espesor $d$ y permeabilidad $\mu_2$, como muestran las figuras 3.6(a) y (b), en el seno de un gas de permeabilidad $\mu_1$, observamos lo siguiente:

En el caso de la figura 3.6(a) un desplazamiento $dl$ de la placa cuyo borde es

paralelo a las componentes tangenciales del campo magnético, en este caso paralelo al campo **H**, podemos observar que el flujo **varía** a través de una espira hipotética como el rectángulo ABCD dibujado, dado que el campo magnético **B** es mayor en la placa que en el gas ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ y $\mu_2 > \mu_1$). El incremento de flujo genera una f.e.m. que produce una corriente que tiende a oponerse al incremento de flujo; dicha corriente tiene por tanto sentido contrario a las corrientes, cuya densidad es $K$, que circulan por las placas. Para mantener **H** constante las fuentes externas tienen que suministrar una corriente que compense la debida a la inducción electromagnética, por tanto estamos en el caso indicado en el apartado 5.1 donde las fuentes externas tiene que suministrar energía para mantener la corriente constante.

La figura 3.6(b) muestra el desplazamiento *dl* de una placa similar a la anterior, pero ahora el borde que se desplaza es perpendicular a la dirección del campo. Aquí las componentes normales de **B** se conservan y por tanto el flujo a través de la espira ABCD se mantiene constante, es decir, estamos en el caso del apartado 5.2, donde el trabajo se hace a costa de la energía del sistema.

## 7. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 3.1** Disponemos un tubo conductor centrado en el eje Z. El tubo es de longitud $L$, su radio interior es $a$ y el exterior $b$. Dicho tubo está en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = \mathbf{u}_z\, B_o \cos\omega t$. La conductividad del material que compone el tubo es $\gamma$.

Calcular el valor medio de la potencia disipada en el tubo

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_a^b \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\, dv \quad ; \quad T = 2\pi/\omega.$$

Suponemos la conductividad $\gamma$ baja, de manera que el campo creado por las corrientes inducidas en despreciable frente $\mathbf{B}$.

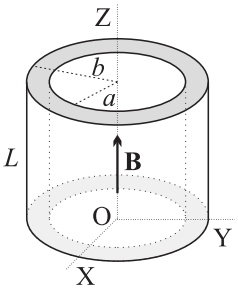


Figura E3.1

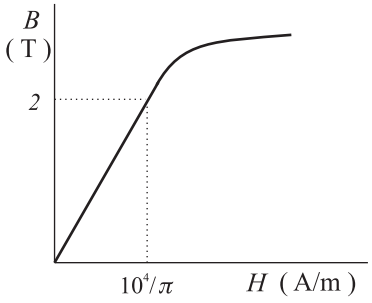


Figura E3.2

**E 3.2** Sobre un toroide de material ferromagnético y sección cuadrada, arrollamos 1000 espiras. El radio interior es $R_1 = 0,19$ m y el exterior $R_2 = 0,21$ m. Una forma aproximada de la curva de primera imanación se muestra figura E3.2. La corriente final que circula por las espiras es 2 A.

Calcular la energía suministrada para establecer el campo en el toroide.

**E 3.3** Por un conductor cilíndrico flexible e indefinido y de radio $R$, circula una corriente $I$. Mediante una presión se reduce el radio del cilindro de $R$ a $R'$, manteniéndose constante la corriente $I$.

Calcular la variación de energía magnética en el interior de un cilindro, coaxial con el anterior, de radio $R_o = 2R$ y altura $h$.

**E 3.4** La piezas polares de un electroimán están diseñadas de manera que la intensidad de campo $\mathbf{H}$ en la zona de trabajo es de la forma:

$$\mathbf{H} = H_o \left(\frac{z_o - z}{d}\right)^{1/2} \mathbf{u}_y$$

Una muestra de permeabilidad $\mu$ y volumen $V$ tan pequeño que suponemos el campo uniforme en dicho volumen, está situada como indica la figura E3.4. Calcular la fuerza sobre la muestra.

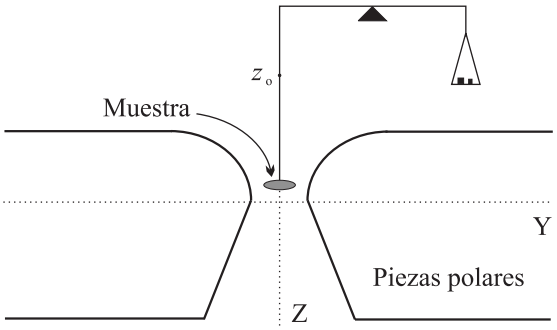



Figura E3.4

**E 3.5** En un material magnético no lineal la relación entre imanación **M** e intensidad de campo magnético **H** viene dada por la curva que muestra la figura E3.5. Calcular la energía por unidad de volumen suministrada al material cuando **H** varía de 0 a 3 A/m.

**Nota:** La curva de la figura, en el intervalo $(0, 3)$, se puede expresar, de forma aproximada, mediante la ecuación $M = \frac{1}{3}H - \frac{1}{45}H^3$.

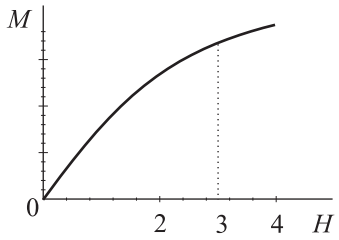



Figura E3.5

**E 3.6** En el espacio entre dos cilindros conductores coaxiales se introduce un tubo de material cuya permeabilidad es $\mu$ y su conductividad $\gamma$. La disposición de los componentes y sus dimensiones de muestran figura E3.6. A los conductores coaxiales se aplica un generador que mantiene la corriente constante e igual $I$.

Suponemos que la conductividad del tubo es mucho menor que la de los conductores coaxiales. También consideramos que el tubo se mantiene en contacto con los conductores en su desplazamiento.

Calcular la fuerza que se ejerce sobre el tubo.

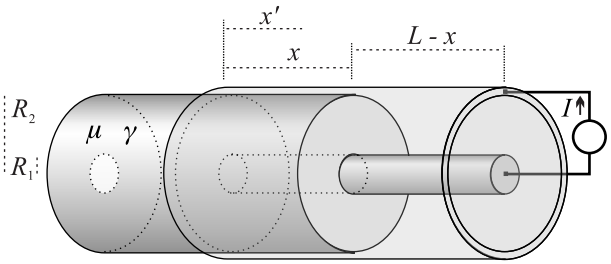



Figura E3.6

**E 3.7** Tenemos un sistema formado por un imán permanente entre cuya piezas polares se mueve una espira rectangular. Los lados de la espira son $h$ y $l$ ($l \gg h$). La espira está formada por unos conductores cuya resistencia es $R$ y una pila de f.e.m. $V$. La espira se puede mover en el plano XY y en la dirección del eje Y. Como consecuencia de la fuerza magnética la espira se mueve con una parte dentro de las piezas polares como muestra la figura 3.7.

- Mediante la segunda ley de Kirchhoff establecer la relación entre tensiones y corrientes y calcular la energía que suministra la pila en un intervalo de tiempo $dt$.
- Calcular la fuerza magnética sobre el lado $h$ de la espira y el trabajo realizado para desplazarla una distancia $dy$. Comparar este resultado con la energía obtenida en el apartado anterior.

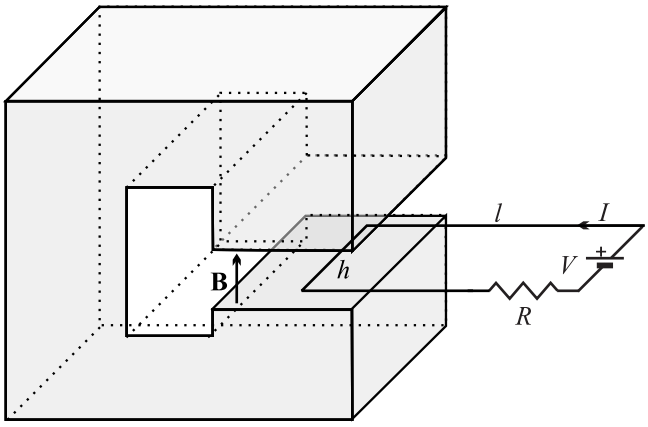



Figura E3.7

**E 3.8** Disponemos de un cable coaxial como indica la figura E3.8. El conductor interior es rígido y de radio $a$, el exterior flexible y de radio $b$. Mediante una batería se mantiene constante la corriente que circula por ambos conductores.

Calcular la diferencia de presión que debe existir entre la parte exterior del cable coaxial y la zona comprendida entre los conductores de radios $a$ y $b$, para que no se deforme el conductor flexible.

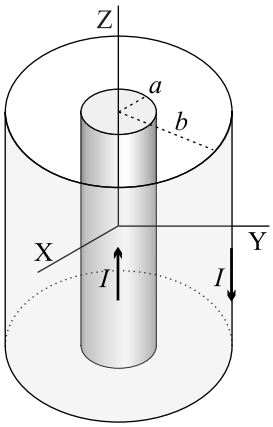



Figura E3.8

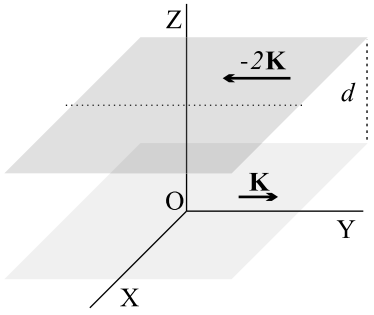



Figura E3.9

**E 3.9** Calcular la presión magnética sobre las placas paralelas e indefinidas, dispuestas como indica la figura E3.9, y por las que circulan corrientes cuyas densidades superficiales se indican.

Tema 4

# CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

## RESUMEN

### Objetivos generales

Establecer las ecuaciones que describen el comportamiento del campo electromagnético tanto en campos estáticos como dependientes del tiempo.

Estudio de las ecuaciones para los potenciales electrodinámicos, estableciendo las relaciones entre los campos eléctrico y magnético y dichos potenciales.

Análisis del Teorema de Poynting que establece el balance de potencia en un volumen donde existe un campo electromagnético y otros elementos que generan o absorben potencia.

### Objetivos específicos

- Resumir las ecuaciones derivadas para campos y corrientes en circuitos cerrados.
- Ecuaciones constitutivas que relacionan los vectores de campo a través de los parámetros que caracterizan los medios materiales.
- Establecer la ecuación que generaliza el teorema de Ampère para circuitos abiertos: Concepto de corriente de desplazamiento.
- Ecuaciones de Maxwell como resumen de todas las ecuaciones que permiten el estudio de los fenómenos electrodinámicos desde un punto de vista clásico.
- Fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton.
- Ecuaciones de Maxwell en medios materiales y desde un punto de vista macroscópico.
- Principio de superposición lineal.

- Unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell.
- Deducir las condiciones en los límites para los vectores de campo: Componentes normales y tangenciales.
- Establecer, a partir de las ecuaciones de Maxwell, la relación entre los campos eléctrico y magnético y los potenciales en el caso de campos variables con el tiempo.
- Deducir las ecuaciones de onda para los potenciales.
- Establecer la condición de Lorenz que relaciona entre sí los potenciales escalar eléctrico y vector magnético y simplifica las ecuaciones de onda para los potenciales.
- Deducir las condiciones en los límites para los potenciales.
- Analizar el Teorema de Poynting.
- Definir el vector de Poynting.
- Analizar el teorema de Poynting en el caso de campos que varía sinusoidalmente; es decir, campos que se pueden expresar en forma compleja.
- Valor medio del vector de Poynting para campos que varían sinusoidalmente con el tiempo.
- Valor medio de las densidades de energía eléctrica y magnética en el caso de campos que varían sinusoidalmente con el tiempo.
- Balance de potencia en el caso de dieléctricos con pérdidas.

### Requisitos previos

Para entender este tema son de especial importancia los conceptos matemáticos acerca de cálculo vectorial que son también requisito en los temas anteriores.

Haber comprendido los conceptos desarrollados en el tema 3, y por tanto los que se estudian en los anteriores.

## INTRODUCCIÓN

En este tema se completa el estudio de las relaciones entre los campos eléctrico y magnético con la aportación de Maxwell que muestra como las fuentes de un campo magnético no sólo son las corrientes de conducción sino que un campo magnético puede ser producido por un campo eléctrico variable a través de un término denominado corriente de desplazamiento. De esta manera se muestra la interdependencia entre los campos eléctrico y magnético y podemos hablar del campo electromagnético.

La consecuencia de esta interdependencia es la generación y propagación de las ondas electromagnéticas. La formulación teórica propuesta por Maxwell predecía la existencia de ondas electromagnéticas y que la luz era una onda electromagnética. La generación de ondas electromagnéticas por corrientes variables fue descubierta por Hertz en 1887, y de esta forma se confirmó la validez del modelo propuesto por Maxwell.

En este tema iniciaremos la aplicación de las ecuaciones de Maxwell para resolver los problemas en que interviene el campo electromagnético, prestando atención especial a los campos variables con el tiempo.

Comenzaremos por introducir los potenciales electrodinámicos y su relación con los campos eléctrico y magnético. Se deducirán las ecuaciones de onda para dichos potenciales y se establecerán las condiciones, normas, que simplifican las ecuaciones de onda y relacionan los potenciales entre sí.

A continuación se analizará el teorema de Poynting que establece el balance de potencia cuando interviene el campo electromagnético. Definiremos el vector de Poynting en función de los vectores de campo eléctrico y magnético.

En este tema no trataremos el tema del momento lineal del campo electromagnético, cuyo estudio es más apropiado acometer en el contexto de la Electrodinámica Clásica y con las herramientas de cálculo tensorial asociadas a la Relatividad Especial.

## 1. CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

Las ecuaciones del campo eléctrico y magnético estudiadas hasta ahora, se derivan de las leyes de Coulomb, Biot y Savart, Faraday, y la ecuación de continuidad que expresa el principio de conservación de la carga. En el vacío, sus

expresiones en forma integral y diferencial obtenidas aplicando los teoremas de la divergencia y de Stokes, son las siguientes:

$$\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = Q = \int_V \rho\, dv \quad ; \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho \tag{E1}$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} \quad ; \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial\, t} \tag{E2}$$

$$\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0 \quad ; \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{E3}$$

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} \quad ; \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{E4}$$

$$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{d\,t} = -\frac{\partial}{\partial\, t}\int_V \rho\, dv \quad ; \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\,\rho}{\partial\, t} \tag{E5}$$

A éstas debemos añadir las ecuaciones constitutivas que relacionan los distintos vectores a través de parámetros (permitividad $\varepsilon$, permeabilidad $\mu$ y conductividad $\gamma$) que caracterizan los medios desde un punto de vista macroscópico:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}, \qquad \mathbf{J} = \gamma\,\mathbf{E}$$

En las cinco primeras ecuaciones podemos observar lo siguiente:

- La segunda muestra que un campo magnético variable puede generar un campo eléctrico, pero la cuarta indica que no ocurre lo mismo con $\mathbf{H}$, pues la intensidad de campo magnético tiene su origen en la densidad de corriente $\mathbf{J}$.
- Si aplicamos la cuarta ecuación a un circuito abierto como el que se muestra en la figura 4.1 encontramos lo siguiente: En el primer miembro se toma como camino de integración la curva $C$. El segundo miembro proporciona dos resultados distintos si consideramos la superficie $S_1$ o la $S_2$. La primera dará un resultado nulo ya que no es atravesada por ninguna densidad de corriente $\mathbf{J}$, y sobre $S_2$ la integral es igual a la corriente $I$ que la atraviesa.

Por otra parte si calculamos la integral de superficie de $\mathbf{J}$ sobre la superficie cerrada $(S_1 + S_2)$ tendremos que,

$$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{s} = I \neq 0$$

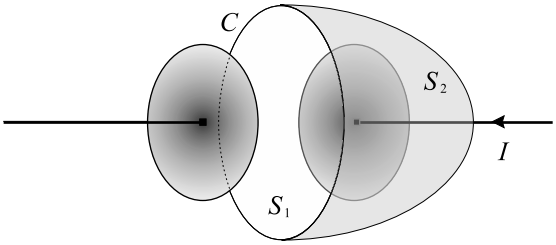



Figura 4.1

Esta circunstancia nos recuerda la quinta ecuación, ecuación de continuidad, derivada del principio de conservación de la carga. De ella se deduce que el flujo está relacionado con la variación temporal de la carga en el interior de la superficie cerrada, y por tanto de la dependencia temporal del campo eléctrico.

La contradicción o inconsistencia en el resultado de la aplicación de la cuarta ecuación a circuitos abiertos fue resuelta por Maxwell modificando dicha ecuación. Para ello Maxwell puso de manifiesto que si en la ecuación de continuidad se sustituye la integral de volumen de la densidad de carga $\rho$ por el valor que proporciona la ecuación (E1), el resultado es,

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

Como las dos integrales se refieren a la misma superficie podemos trasponer los términos al primer miembro y obtenemos la siguiente relación,

$$\int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0$$

Es decir, si consideramos la corriente total $\mathbf{J}_t$,

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{4.1}$$

La integral de $\mathbf{J}_t$ sobre una superficie cerrada es nula, condición que cumplen las corrientes estacionarias utilizadas para obtener el teorema de Ampère que expresa la cuarta ecuación. Sustituyendo $\mathbf{J}_t$ en dicha ecuación obtenemos,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{s} \tag{4.2}$$

Esta ecuación resuelve la contradicción en el teorema de Ampère cuando interviene un circuito abierto. En el ejemplo propuesto sobre la superficie $S_2$ la corriente total se reduce a la corriente de conducción $\mathbf{J}$, y sobre la superficie $S_1$ se considera únicamente $(\partial\mathbf{D}/\partial t)$. El término,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

fue introducido por Maxwell y lo denominó **corriente de desplazamiento**. . *Esta corriente se debe a las variaciones de la carga sobre la placa cerrada por las superficie $S_1 + S_2$, que lleva consigo la modificación del campo eléctrico entre placas.*

La nueva ecuación obtenida por Maxwell, no sólo elimina la contradicción indicada, sino que además amplía el teorema de Ampère a corrientes variables en circuitos abiertos y pone de manifiesto que un campo magnético puede ser generado por un campo eléctrico dependiente del tiempo. En definitiva la expresión (4.2) completa el conjunto de ecuaciones que muestran la interdependencia entre los campos eléctrico y magnético, lo que nos permite introducir el campo electromagnético como una entidad que engloba los fenómenos eléctricos y magnéticos tanto con cargas y corrientes estacionarias como variables lenta o rápidamente.

La interdependencia entre los campos eléctrico y magnético es la base de los fenómenos de propagación y radiación (generación de ondas electromagnéticas) como predijo Maxwell y posteriormente descubrió Hertz. Además Maxwell dedujo de su teoría que la luz es una onda electromagnética que se propaga en el vacío.

## 2. ECUACIONES DE MAXWELL-LORENTZ

Interesa resumir el conjunto de ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos desde un punto de vista clásico. El primer grupo de ecuaciones son las siguientes:

$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{r},\, t)\cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho(\mathbf{r},\, t)\, dv \quad \rightarrow \quad \nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},\, t) = \rho(\mathbf{r},\, t) \tag{4.3}$$

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r},\, t)\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},\, t)\cdot d\mathbf{s} \rightarrow \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\,\mathbf{B}(\mathbf{r},\, t)}{\partial\, t} \tag{4.4}$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},\, t)\cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},\, t) = 0 \tag{4.5}$$

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r},\, t)\cdot d\mathbf{l} \;=\; \int_S (\mathbf{J}(\mathbf{r},\, t)+\frac{\partial\,\mathbf{D}(\mathbf{r},\, t)}{\partial\, t})\cdot d\mathbf{s}\rightarrow \tag{4.6}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{J}+\frac{\partial\,\mathbf{D}(\mathbf{r},\, t)}{\partial\, t}$$

*Este grupo de ecuaciones reciben el nombre de* **ecuaciones de Maxwell**.

La ecuación (4.3) es la forma integral del teorema de Gauss, que se deriva de la ley de Coulomb para cargas estáticas. Como no se han encontrado datos experimentales que contradigan dicha relación en el caso de cargas que varían con el tiempo, podemos postular la validez general de dicha ecuación. La ecuación (4.4) es la ley de inducción electromagnética, ley de Faraday. La ecuación (4.5) es el teorema del flujo derivado de la ley de Biot-Savart, y como no se han encontrado monopolos magnéticos, dicha ecuación es aplicable tanto a campos estáticos como variables con el tiempo. La ecuación (4.6) es la descubierta por Maxwell, que amplía el teorema de Ampère a corrientes no estacionarias y completa la relación entre los campos eléctrico y magnético.

Las **ecuaciones constitutivas** forman el segundo grupo y son,

$$\mathbf{D}=\varepsilon\,\mathbf{E} \tag{4.7}$$

$$\mathbf{B}=\mu\,\mathbf{H} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{J}=\gamma\,\mathbf{E} \tag{4.9}$$

El sistema formado por las ecuaciones de Maxwell y las tres ecuaciones constitutivas permiten calcular las componentes de los vectores $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, y $\mathbf{J}$.

En el primer grupo de ecuaciones está implícita la ecuación de continuidad, ya que hemos utilizado dicha ecuación para introducir la corriente de desplazamiento.

El conjunto de ecuaciones anteriores se han derivado inicialmente de unas leyes experimentales cuya aplicabilidad es restringida. Su generalización proporciona un sistema de ecuaciones que se aplican a los fenómenos electromagnéticos tanto en el vacío como en presencia de medios materiales lineales; además de servir para campos estáticos y variables con el tiempo. Es decir, describen el comportamiento del campo electromagnético desde el punto de vista macroscópico cuando las fuentes y parámetros que describen los medios son funciones continuas y la respuesta del medio es lineal.

Cuando se trata de materiales como los ferroeléctricos y ferromagnéticos la relación $\mathbf{D}=f(\mathbf{E})$ para los primeros y $\mathbf{B}=f(\mathbf{H})$ para los segundos no es lineal,

es decir depende del valor del campo. Esto significa que las ecuaciones de Maxwell se aplican a los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, y se obtiene $\mathbf{D}$ y $\mathbf{H}$ a través de las permitividades y permeabilidades respectivas que corresponden al valor del campo considerado.

La aplicación cuando se estudian fenómenos atómicos requiere la cuantificación de las fuentes y de la emisión de la radiación; además aparecen efectos no lineales de naturaleza mecánico cuántica.

El conjunto anterior se complementa con la **fuerza de Lorentz** y la **segunda ley de Newton**,

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{4.10}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \frac{d\,\mathbf{p}}{d\,t} \tag{4.11}$$

Las ecuaciones enumeradas en este apartado nos permiten estudiar desde el punto de vista clásico los problemas de dinámica de partículas cargadas y su interacción con el campo electromagnético.

## 2.1. Ecuaciones de Maxwell en materiales

Las ecuaciones de Maxwell descritas por (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) se aplican por igual tanto en el vacío como en medios materiales. Pero en este último caso debemos tener en cuenta las limitaciones que impone la posibilidad de que el problema sea tratable. En primer lugar debemos considerar en el material un conjunto de átomos y fuentes de una forma global, no como un sistema discreto con un número elevado de componentes. Es decir, consideramos las fuentes y los átomos como una distribución continua de la que tomamos valores medios. Esto se traduce en que tanto las fuentes $\rho$, $\mathbf{J}$ como los parámetros que caracterizan los medios, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{M}$, son distribuciones continuas. Por lo tanto en las ecuaciones de Maxwell aparecen de forma explícita, además de las densidades de carga y corriente libres $\rho$ y $\mathbf{J}$, la polarización $\mathbf{P}$ que corresponde a las densidades de carga ligadas a los átomos, y la imanación $\mathbf{M}$ correspondiente a corrientes ligadas a los átomos y momentos intrínsecos de las cargas.

En este apartado nos vamos a limitar a medios lineales, homogéneos e isótropos; es decir, medios en los que la permitividad, conductividad y permeabilidad no dependen del campo ni del punto considerado. Además consideramos los medios en reposo.

Atendiendo a las consideraciones indicadas en los párrafos anteriores, las relaciones entre los campos vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad B = \mu_o \left(\mathbf{H} + \mathbf{M}\right) \rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_o}\mathbf{B} - \mathbf{M}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (4.6) tendremos que,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_o}\mathbf{B} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

Trasponiendo términos,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \left(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4.12}$$

En el primer término del segundo miembro están sumadas la corriente *libre* $\mathbf{J}$ y las corrientes ligadas al comportamiento de los átomos y moléculas,

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \text{corriente de polarización}; \qquad \mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \text{corriente de imanación}$$

La ecuación (4.12) expresa la relación entre el campo magnético $\mathbf{B}$ y los distintos tipos de fuentes que intervienen en el caso de medios en reposo, que además son lineales, homogéneos e isótropos.

## 3. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son lineales, ya que en sus términos no hay producto de dos campos, por tanto se cumple el principio de superposición lineal. Por ejemplo, si $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ en la ecuación (4.4) se verifica que,

$$\nabla \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = \nabla \times \mathbf{E}_1 + \nabla \times \mathbf{E}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t}$$

Por tanto la suma cumple también la ecuación de Maxwell.

El principio de superposición lineal se cumple en el vacío y para las intensidades de campo usuales en puntos no muy próximos a las fuentes (distancias superiores al radio del electrón).

En medios no lineales (como los ferroeléctricos y ferromagnéticos) no se puede aplicar el principio de superposición cuando intervienen los parámetros de los medios. En el dominio subatómico aparecen fenómenos no lineales y por tanto tampoco se puede aplicar dicho principio.

### 3.1. Unicidad de las soluciones

Se puede demostrar, aunque no lo vamos a hacer aquí, que la solución de las ecuaciones de Maxwell que cumpla unas determinadas condiciones de contorno es única. Es decir, cualquiera que sea el procedimiento utilizado, si la solución satisface las ecuaciones de Maxwell y cumple las condiciones de contorno correspondientes al problema propuesto, la solución es única.

## 4. CONDICIONES EN LOS LÍMITES

Cuando existe más de un tipo de material en el espacio donde calculamos los vectores de campo, debemos obtener la solución en cada zona y después relacionar las soluciones mediante las condiciones en la frontera para dichos vectores.

Vamos a resumir ahora las condiciones en los límites estudiadas en capítulos anteriores, ampliando, cuando sea necesario, las condiciones derivadas de la existencia de campos dependientes del tiempo.

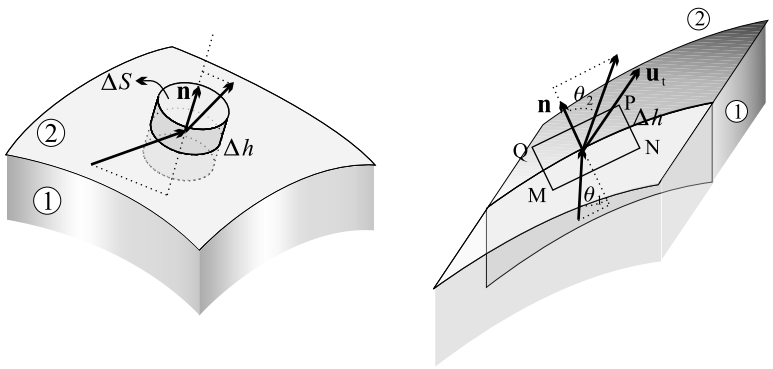



Figura 4.2

Suponemos que los medios son homogéneos, lineales e isótropos.

De forma análoga a como procedimos en magnetostática (y que es también análogo al procedimiento en electrostática), se aplican las ecuaciones de Maxwell en la frontera. Consideramos una caja cilíndrica como la indicada en la figura 4.2(a) para componentes normales y un camino MNPQ como el indicado en la figura 4.2(b) para las tangenciales.

## 4.1. Componentes normales

De la ecuación (4.3) se deduce que *las componentes normales del vector* $\mathbf{D}$ *cambian si existe una densidad superficial de carga* $\rho_s$ *en la frontera, y su expresión matemática es la siguiente,*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \tag{4.13}$$

Aplicando la ecuación constitutiva $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$, las componentes normales de $\mathbf{E}$ cumplen la siguiente relación,

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_2\mathbf{E}_2 - \varepsilon_1\mathbf{E}_1) = \rho_s \tag{4.14}$$

De la ecuación (4.5) se deduce de forma análoga que *las componentes normales del campo magnético son continuas en la superficie de separación entre dos medios materiales.* La forma matemática de expresarlo es,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{4.15}$$

La ecuación $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$ nos permite deducir la siguiente relación entre las componentes normales de la intensidad de campo magnético,

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2\mathbf{H}_2 - \mu_1\mathbf{H}_1) = 0 \tag{4.16}$$

De la ecuación de continuidad se deduce que *las componentes normales del vector densidad de corriente eléctrica cambian con la variación temporal de la densidad superficial de carga en el límite entre medios,* y la forma matemática de expresarlo es la siguiente,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial\,\rho_s}{\partial t} \tag{4.17}$$

La ecuación constitutiva $\mathbf{J} = \gamma\,\mathbf{E}$ nos lleva a la relación

$$\mathbf{n} \cdot (\gamma_2\,\mathbf{E}_2 - \gamma_1 \mathbf{E}_1) = -\frac{\partial\,\rho_s}{\partial\,t} \tag{4.18}$$

### 4.2. Componentes tangenciales

Las componentes tangenciales se obtienen aplicando las ecuaciones de Maxwell relativas a la integral de línea, circulación, de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ sobre el camino MNPQ entre los dos medios cuando $\Delta h \to 0$.

De la ecuación (4.4) y siempre que la derivada del segundo miembro esté acotada en la frontera, se deduce que *las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas y cumplen la siguiente relación*,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \tag{4.19}$$

Considerando que $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon$,

$$\mathbf{n} \times (\frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_2} - \frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon_1}) = 0 \tag{4.20}$$

A partir de la ecuación (4.6), considerando que $(\partial\mathbf{D}/\partial t)$ esté acotada en la frontera, se deduce que *las componentes tangenciales de* $\mathbf{H}$ *cambian de un medio a otro si existe una densidad de corriente en la superficie de separación, dicho comportamiento se expresa de la siguiente forma*,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \tag{4.21}$$

$\mathbf{K}$ es la densidad de corriente superficial en la superficie de separación entre los medios.

Utilizando la ecuación $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$,

$$\mathbf{n} \times (\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1}) = \mathbf{K} \tag{4.22}$$

## 5. POTENCIALES ELECTRODINÁMICOS

El sistema de ecuaciones que relacionan los campos eléctrico y magnético con las fuentes que lo generan permite calcular dichos campos si además conocemos las

condiciones en la frontera entre distintos medios. Atacar un problema utilizando directamente las citadas ecuaciones no suele ser fácil, por ello se recurre, como se hace en electrostática y magnetostática, a la introducción de potenciales. En electrostática se introduce el potencial escalar $V$ y en magnetostática el potencial vector $\mathbf{A}$.

Ahora bien, para campos variables con el tiempo, la ecuación derivada de la ley de Faraday muestra que el campo $\mathbf{E}$ es rotacional, y por tanto no puede depender únicamente de un potencial escalar. Veremos a continuación cómo se introducen los potenciales en el caso de campos variables.

La ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se mantiene, por tanto el potencial vector magnético $\mathbf{A}$ tiene la misma relación con el campo magnético que obtuvimos en magnetostática, es decir:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{4.23}$$

Si llevamos esta relación al ecuación de Maxwell indicada anteriormente tendremos que,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}$$

Trasponiendo términos,

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{4.24}$$

La ecuación anterior muestra que el término entre paréntesis sí es irrotacional y por tanto se puede poner en función de un potencial escalar. En forma matemática esto se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \tag{4.25}$$

Despejando $\mathbf{E}$ vemos que el campo eléctrico se puede poner en función del potencial escalar $V$ y del potencial vector $\mathbf{A}$

$$\mathbf{E} = -\left( \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \tag{4.26}$$

La integral de la ecuación (4.26) entre dos puntos es el **voltaje**, que como vemos en la siguiente ecuación es distinto de la diferencia de potencial entre los mismos puntos cuando $\partial \mathbf{A}/\partial t \neq 0$.

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{l} - \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

La ecuación anterior se reduce a la obtenida en electrostática cuando el potencial vector no depende del tiempo; es decir, cuando $\partial \mathbf{A}/\partial t = 0$.

Hasta ahora hemos utilizado dos de las ecuaciones de Maxwell; mediante las otras dos podemos obtener dos ecuaciones para los potenciales. Deduciremos dichas ecuaciones en el caso de campos en el vacío.

Teniendo en cuenta que en el vacío $\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}$, y llevando la ecuación (4.26) a la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, tendremos,

$$\nabla \cdot \left( \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Como $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$,

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{4.27}$$

Aplicando los potenciales en la ecuación $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J} + \mu_o \varepsilon_o (\partial \mathbf{E}/\partial t)$,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_o \mathbf{J} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

Si utilizamos la relación vectorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

realizamos operaciones y trasponemos términos, tendremos que,

$$\left( \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_o \mathbf{J} \tag{4.28}$$

En la ecuación anterior aparece la derivada segunda del potencial vector, que tiene su origen en la corriente de desplazamiento introducida por Maxwell. Como veremos en temas posteriores, este término lleva a que las soluciones para los potenciales incluyan un término de retardo, que a su vez pone de manifiesto que las perturbaciones del campo electromagnético se propagan con una velocidad finita, dicha velocidad es la de la luz en el medio considerado.

## 5.1. Transformaciones de norma

Las ecuaciones (4.27) y (4.28) verifican las ecuaciones de Maxwell pero no permiten obtener fácilmente los potenciales en función de las fuentes, ya que los

dos potenciales intervienen en ambas ecuaciones. Para simplificar las ecuaciones anteriores vamos a utilizar las propiedades de los potenciales $\mathbf{A}$ y $V$.

En el caso del potencial vector $\mathbf{A}$ podemos añadir un término derivado del gradiente de una función escalar, ya que el rotacional de este término es nulo y no afecta al valor del campo magnético obtenido mediante $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, esto es:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi \tag{4.29}$$

Despejando $\mathbf{A}$ y sustituyendolo en la ecuación (4.26) obtenemos la siguiente relación,

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(V - \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}$$

Por tanto, la siguiente transformación para el potencial escalar

$$V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{4.30}$$

deja invariante el campo eléctrico.

Las transformaciones conjuntas de los potenciales dadas por (4.29) y (4.30) se conocen como **transformaciones de norma o de contraste** (gauge) y dejan invariantes los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.

Estas transformaciones se pueden utilizar para simplificar las ecuaciones (4.7) y (4.28). La forma que se utiliza depende de las condiciones del campo electromagnético en el problema que deseamos abordar. Los dos tipos de transformaciones más conocidos son la **norma (gauge) de Lorenz y la norma (gauge) de Coulomb.** Aquí vamos a tratar sólo la **norma de Lorenz**.

## 5.2. Norma de Lorenz

La libertad que que tenemos para elegir los potenciales, siempre que cumplan las transformaciones (4.30) y por tanto dejen invariantes los campos, la utilizamos para simplificar las ecuaciones (4.27) y (4.28). La norma de Lorenz utiliza una relación entre los potenciales, conocida como **condición de Lorenz**, que permite simplificar el segundo término del primer miembro de la ecuación (4.28), dicha relación es:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{4.31}$$

Se puede demostrar (pero no lo haremos aquí) que si existen unos potenciales $\mathbf{A}$, $V$ que no cumplen la condición anterior, entonces mediante las transformaciones (4.29) y (4.30) se pueden encontrar otros $\mathbf{A}'$, $V'$ que sí la cumplen.

Con la condición de Lorenz las ecuaciones para los potenciales se simplifican y quedan de siguiente forma,

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_o\mathbf{J} \tag{4.32}$$

Despejando $\nabla\cdot\mathbf{A}$ en la ecuación (4.31) y llevado el resultado a la ecuación (4.27) queda la siguiente relación para el potencial escalar $V$,

$$\nabla^2 V - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{4.33}$$

*Vemos que las ecuaciones para los potenciales tienen la misma forma. Además estas ecuaciones son independientes del sistema de coordenadas elegido, lo que nos lleva a pensar en la utilidad de este tipo de condición cuando se tratan los campos en la teoría de la relatividad.*

Si tenemos en cuenta la definición de la **d'Alembertiana,**

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.34}$$

Podemos escribir las ecuaciones anteriores de la siguiente forma,

$$\Box^2\mathbf{A} = -\mu_o\mathbf{J} \tag{4.35}$$

$$\Box^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{4.36}$$

La condición de Lorenz restringe la arbitrariedad en la relación entre potenciales. Para demostrarlo basta con buscar las condiciones que se deben cumplir, para que los potenciales vector $\mathbf{A}'$ y escalar $V'$, satisfagan también la condición de Lorenz. Llevando las relaciones (4.30) a la ecuación (4.31) tenemos,

$$\nabla\cdot\mathbf{A}' + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial V'}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

Para que los nuevos potenciales cumplan la condición de Lorenz la función $\phi$ tiene que cumplir la siguiente ecuación,

$$\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.37}$$

Cuando $\phi$ verifica la relación anterior, todos los potenciales obtenidos mediante las transformaciones definidas por las ecuaciones (4.30) cumplen la condición de Lorenz.

### 5.3. Condiciones en los límites para los potenciales

*En la frontera entre dos medios,* de la ecuación (4.3) y siempre que $\partial \mathbf{A}/\partial t$ sea finita, se deduce que,

$$V_2 = V_1 \tag{4.38}$$

Las componentes tangenciales del potencial vector $\mathbf{A}$ son continuas en la frontera dado que $\mathbf{B}$ es finita y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Por otra parte la condición de Lorenz, suponiendo que $\partial V/\partial t$ es finita, nos permite deducir que las componentes normales de $\mathbf{A}$ son continuas, por tanto se verifica que,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \tag{4.39}$$

en la frontera entre dos materiales.

## 6. TEOREMA DE POYNTING

En este apartado tratamos la conservación de la energía en un campo electromagnético. Para ello consideramos el balance de energía en un volumen dado.

Si en un instante dado tenemos una determinada distribución de carga y corriente, éstas producirán unos campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Si partiendo de estos campos movemos una carga elemental $dq = \rho dv$,[1] el trabajo elemental realizado se obtiene mediante la fuerza de Lorentz,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (\rho\mathbf{E} + \rho\mathbf{v} \times \mathbf{B})\, dv \cdot d\mathbf{l}$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ y $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$,

$$dW = (\rho\mathbf{E} + \rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}\, dv\, dt$$

[1] En esta expresión $dv$ es el volumen elemental, por tanto $v$ se refiere a volumen y no a velocidad. A lo largo de la sección $v$ representa indiferentemente volumen o velocidad, pero creemos que el contexto es suficientemente clarificador para saber cuándo se refiere a una u otra magnitud.

Como $(\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$, queda,

$$dW = \rho\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\, dv\, dt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv\, dt$$

La potencia $P$ que se pone en juego en un volumen $V$ será,

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \tag{4.40}$$

De lo indicado en párrafos anteriores vemos que las fuerzas magnéticas no realizan trabajo porque siempre son perpendiculares al camino recorrido.

Además la potencia puede ser disipada en forma de calor o transformada en energía mecánica. También puede existir un generador que suministre potencia que en parte se disipe y el resto se radie a través de la superficie $S$ que limita el volumen $V$ o se transforme en una energía electromagnética variable con el tiempo dentro del volumen.

Para expresar de forma explícita los distintos componentes que intervienen en el balance de energía se parte de la ecuación anterior y, utilizando las ecuaciones de Maxwell además de la energía electrostática y magnetostática, se demuestra la relación entre dichos componentes que se conoce como **teorema de Poynting**.

Despejando la densidad de corriente de la ecuación de Maxwell (4.6) y suponiendo que los campos se consideran en el vacío,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Sustituyendo en el integrando de la ecuación (4.40),

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_o} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_o \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Aplicando la relación vectorial (C.40),

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

Despejando $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ y utilizando la ecuación (4.4) derivada de la ley de Faraday,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_o} \left( -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \varepsilon_o \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En el vacío y medios lineales,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_o}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \\ \varepsilon_o\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}) \end{aligned}$$

por tanto,

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = -\frac{1}{\mu_o}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{E})$$

Aplicamos el teorema de la divergencia al primer término del segundo miembro, siendo $S$ la superficie que limita el volumen $V$ considerado. Si llevamos esta relación a la ecuación (4.40) y sustituimos $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_o$, queda,

$$\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\; dv = -\int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{s} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) dv \qquad (4.41)$$

En la primera integral del segundo miembro figura el término $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, conocido como **vector de Poynting**, cuya ecuación de definición es la siguiente,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad (4.42)$$

El vector de Poynting tiene unidades de energía por unidad de tiempo y unidad de área; es decir, potencia por unidad de área. Sustituyendo y reordenando (4.43):

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) dv = \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\; dv + \int_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s} \qquad (4.43)$$

Esta ecuación se conoce como **teorema de Poynting** y se interpreta de la siguiente forma: a la izquierda tenemos la tasa de pérdida de la energía electromagnética acumulada en el volumen $V$; esta potencia electromagnética perdida se invierte en potencia disipada por efecto Joule (primer término de la derecha) y en el flujo del vector de Poynting a través de la superficie, $S$, que rodea al volumen.

Es decir, parte de la pérdida de energía electromagnética fluye a través de la frontera del volumen considerado y el elemento que fluye es el vector de Poynting definido en 4.42.

Si consideramos que sobre las cargas actúa un nuevo campo no conservativo, $\mathbf{E}'$, de origen electromecánico o químico (baterías), entonces estamos inyectando al sistema una potencia igual a

$$\int_V \mathbf{E}'\cdot\mathbf{J}\, dv$$

que aparece en la parte izquierda de 4.43:

$$\int_V \mathbf{E}' \cdot \mathbf{J}\, dv - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dv = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dv + \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.44)$$

El teorema de Poynting expresado por la ecuación (4.44) *muestra que la pérdida de energía electromagnética en el volumen considerado, $V$, más la potencia inyectada por las baterías externas en ese mismo volumen, es igual al flujo de potencia que sale a través de toda la superficie $S$ que lo limita más la potencia disipada por efecto Joule.*

*Cuando existe radiación de energía el vector de Poynting* $\mathbf{S}$ *representa la energía radiada por unidad de tiempo y superficie; es decir, la potencia radiada por unidad de superficie.*

De todo lo expuesto se concluye que el **teorema de Poynting** *expresa el balance energético en un volumen determinado.*

En el teorema de Poynting la expresión para el vector $\mathbf{S}$ está ligada a la localización de la energía electrostática y magnetostática en el volumen considerado. Cuando se deduce la energía electrostática en función del campo eléctrico la integral se extiende a todo el espacio, por tanto la localización de la energía es un problema abierto para la discusión. Generalmente se toma como hipótesis de trabajo que la energía electrostática y magnetostática, y por tanto la electromagnética que manejamos en el teorema de Poynting, está asociada a la zona donde existe campo electromagnético. Esta forma de expresar la energía concuerda con la idea de que una onda electromagnética transporta una energía asociada al campo electromagnético que se propaga. Si utilizamos esta interpretación para la localización de la energía la forma del vector de Poynting será la obtenida en este apartado, y por tanto podemos tomar el teorema de conservación de la energía en un volumen limitado como lo expresan las ecuaciones (4.43) y (4.44).

Hemos considerado medios lineales. Si existieran medios no lineales y con pérdidas la ecuación (4.44) no sería válida. Para que pudiera expresar el balance de energía deberíamos introducir términos que tuvieran en cuenta las pérdidas de energía por efectos tales como la histéresis en materiales ferromagnéticos o las pérdidas en dieléctricos.

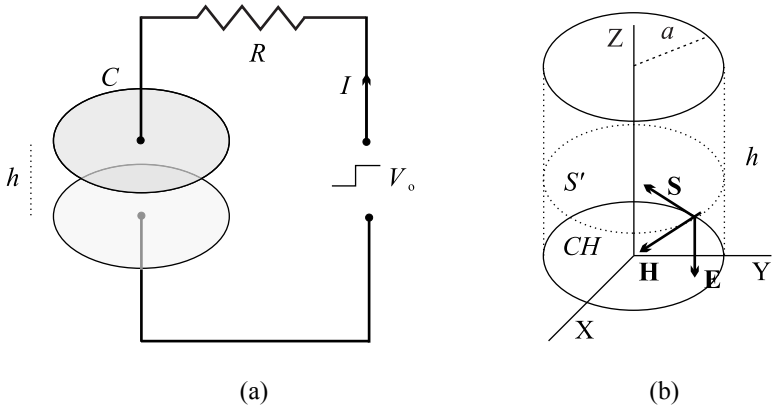



Figura 4.3. Condensador del ejercicio 4.1

## Ejercicio de autoevaluación 4.1

Un condensador de capacidad $C$ está formado por dos placas circulares de radio $a$ separadas por una distancia $d$ como indica la figura 4.3(a). Se carga el condensador a través de una resistencia $R$ mediante un voltaje en forma de escalón.

La corriente en $R$ y la carga en las placas son respectivamente,

$$I = \frac{V_o}{R}\exp(-\frac{t}{RC}) \qquad ; \qquad q = \int_0^t I\ dt$$

Obtener la corriente de desplazamiento en el condensador. Calcular el flujo del vector de Poynting a través de la superficie cilíndrica de radio $a$ y altura $h$ comprendida entre las placas del condensador.

## Solución

Calculamos el vector $\mathbf{D}$ entre las placas del condensador teniendo en cuenta que despreciamos los efectos de borde y por tanto dicho vector es función de la densidad superficial de carga sobre dichas placas. El vector $\mathbf{D}$ es normal

a la superficie de la placa y su módulo es,

$$D = \sigma$$

La superficie de la placa es $\pi a^2$ y la carga sobre ella en un instante dado $q$, por tanto,

$$D = \sigma = \frac{q}{\pi\, a^2} = \frac{1}{\pi\, a^2} \int_0^t I\ dt = \frac{1}{\pi\, a^2} \int_0^t \frac{V_o}{R} \exp(-\frac{t}{R\, C})\ dt$$

Integrando el término exponencial, y suponiendo que utilizamos coordenadas cilíndricas con $\mathbf{D}$ en la dirección de $-\mathbf{u}_z$, obtenemos el siguiente valor de $\mathbf{D}$,

$$\mathbf{D} = -\frac{V_o\, C}{\pi\, a^2} (1 - \exp(-\frac{t}{R\, C}))\, \mathbf{u}_z$$

Derivando la expresión anterior con respecto a $t$ obtenemos la corriente de desplazamiento,

$$\frac{\partial\, \mathbf{D}}{\partial\, t} = -\frac{V_o}{\pi\, a^2 R} \exp(-\frac{t}{R\, C})\, \mathbf{u}_z$$

Para calcular el flujo del vector de Poynting primero debemos obtener $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ sobre la superficie lateral del cilindro.

Si suponemos que la permitividad del medio entre las placas del condensador es $\varepsilon$, el campo entre las placas y en su borde será,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = -\frac{V_o\, C}{\varepsilon\, \pi\, a^2} (1 - \exp(-\frac{t}{R\, C}))\, \mathbf{u}_z$$

Suponer despreciables los efectos de borde lleva consigo que el campo no dependa de la coordenada $z$.

El campo $\mathbf{H}$ en la superficie cilíndrica de radio $a$ y altura $d$ se obtiene aplicando la ecuación (4.6) sobre el camino $CH$ indicado en la figura 4.3(b); considerando además que $\mathbf{J} = 0$ y por tanto la corriente de desplazamiento es la única que atraviesa la superficie $S'$ limitada por $CH$. También tenemos en cuenta la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, lo cual nos lleva a que el campo magnético sólo tiene componente $H_\varphi$. Por último el

sentido de $\mathbf{H}$ que corresponde a la corriente en dirección $-\mathbf{u}_z$ es el indicado en la figura 4.3(b), es decir, $\mathbf{H} = -H_\varphi \mathbf{u}_\varphi$. Con estas consideraciones,

$$\oint_{CH} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} -H_\varphi \mathbf{u}_\varphi \cdot (a\, d\varphi\ \mathbf{u}_\varphi) = -H_\varphi\, 2\pi\, a$$

El flujo de la corriente de desplazamiento a través de $S'$, es,

$$\int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}' = \int_{S'} \frac{-V_o}{\pi\, a^2\, R}\, \exp(-\frac{t}{RC})\, (\mathbf{u}_z \cdot d\mathbf{s}')$$

con $d\mathbf{s}' = ds'\, \mathbf{u}_z$,

$$\int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}' = -\frac{V_o}{\pi\, a^2\, R}\, \exp(-\frac{t}{RC}) \int_{S'} ds'$$

La integral de superficie es $\pi\, a^2$, por tanto,

$$\int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}' = -\frac{V_o}{R}\, \exp(-\frac{t}{RC})$$

Igualando la última expresión con la obtenida para la circulación de $\mathbf{H}$ y despejando $H_\varphi$ queda,

$$H_\varphi = \frac{V_o}{2\pi\, a\, R}\, \exp(-\frac{t}{RC}) \ \rightarrow\ \mathbf{H} = -\frac{V_o}{2\pi\, a\, R}\, \exp(-\frac{t}{RC})\mathbf{u}_\varphi$$

Una vez obtenido $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ el vector de Poynting será, $\mathbf{u}_\varphi$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{V_o\, C}{\varepsilon\, \pi\, a^2}(1 - \exp(-\frac{t}{RC}))(-\frac{V_o}{2\pi\, a\, R}\, \exp(-\frac{t}{RC}))\mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_\varphi$$

$$\mathbf{S} = -\frac{V_o^2\, C}{2\varepsilon\, R\, \pi^2\, a^3}(1 - \exp(-\frac{t}{RC}))\, \exp(-\frac{t}{RC})\, \mathbf{u}_\rho$$

El flujo de $\mathbf{S}$ sobre la superficie lateral se dirige hacia el interior del condensador y es de la forma siguiente,

$$\Phi = \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} \quad ; \quad d\mathbf{s} = h\, a\, d\varphi\ \mathbf{u}_\rho$$

$$\Phi = -\int_0^{2\pi} |\mathbf{S}|\ a\,h\,d\varphi = -\,|\mathbf{S}|\ 2\pi\,a\,h$$

$$\Phi = -\frac{V_o^2\,C\,h}{\varepsilon\,\pi\,a^2\,R}(1-\exp(-\frac{t}{R\,C}))\ \exp(-\frac{t}{R\,C})$$

La capacidad del condensador cuya superficie es $\pi a^2$, espesor $h$ y permitividad $\varepsilon$, es,

$$C = \varepsilon\frac{\pi a^2}{h}$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos que,

$$\Phi = -\frac{V_o^2}{R}(1-\exp(-\frac{t}{R\,C}))\ \exp(-\frac{t}{R\,C})$$

El significado del signo negativo, derivado de que el vector de Poynting $\mathbf{S}$ se dirija hacia el interior del condensador, es que hay un flujo de energía hacia el condensador. Esto es lógico ya que, si partimos de un condensador descargado, al aplicar una tensión en escalón se carga dicho condensador y por tanto se almacena en él una energía.

Para calcular la energía final que almacena el condensador debemos integrar el flujo entre 0 e $\infty$,

$$\begin{aligned} W_C &= \int_0^{\infty} \frac{V_o^2}{R}(1-\exp(-\frac{t}{R\,C}))\ \exp(-\frac{t}{R\,C})dt \\ &= \frac{V_o^2}{R}\int_0^{\infty}(\exp(-\frac{t}{R\,C}) - \exp(-\frac{2t}{R\,C}))\,dt \end{aligned}$$

$$W_C = \frac{V_o^2}{R}\left[-RC(\exp(-\frac{t}{R\,C}) + \frac{RC}{2}\exp(-\frac{2t}{R\,C})\right]_0^{\infty} = V_o^2 C(1-\frac{1}{2})$$

$$W_C = \frac{1}{2}CV_o^2$$

Podemos comprobar que el flujo total de energía que entra en el condensador es igual a la energía de dicho condensador cuando la diferencia de potencial entre sus placas es $V_o$.

En el cálculo del flujo de $\mathbf{S}$ hemos supuesto que el campo $\mathbf{H}$ no depende de la coordenada $z$, es decir, consideramos que $\mathbf{H}$ lo podemos calcular como si la corriente de desplazamiento fuera indefinida en $z$.

## 6.1. Teorema de Poynting en forma compleja

En la mayoría de los casos se estudian campos que dependen del tiempo en forma armónica. Su representación se hace a través de fasores de forma que,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) = \Re(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t})$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (B.57), (B.58) y (B.59) se pueden poner los campo en forma compleja de la siguiente manera[2],

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) = \Re(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \widehat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})e^{-j\omega t}\right) \tag{4.45}$$

Cuando los campos varían armónicamente con el tiempo, los términos de las ecuaciones de Maxwell que implican derivación con respecto al tiempo se transforman en expresiones con números complejos. Para analizar el teorema de Poynting en el caso de campos sinusoidales tendremos que expresar dichos campos mediante la notación compleja y operar de acuerdo con las reglas del apéndice citadas anteriormente.

Si adoptamos la misma representación compleja para $\mathbf{J}$ que hemos utilizado en el caso de $\mathbf{E}$, el primer término de la parte derecha de la ecuación (4.43) será,

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{4}\left(\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \widehat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{r})e^{-j\omega t}\right)\cdot\left(\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \widehat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})e^{-j\omega t}\right)$$

De acuerdo con la relación (B.59) del apéndice,

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\Re\left(\widehat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{r})\cdot\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\cdot\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j2\omega t}\right) \tag{4.46}$$

Cuando se utilizan campos variables se toman los valores medios de energía, potencia, etc. La definición de valor medio para una función periódica, de periodo

[2] El asterisco denota que se ha de tomar el complejo conjugado. Véase el final del apéndice B para las fórmulas más habituales con vectores complejos.

$T$, esta dada por la siguiente ecuación,

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F dt$$

Aplicada a las funciones seno y coseno,

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \text{sen}^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \quad ; \quad \langle \cos 2\omega t \rangle = \langle \text{sen} 2\omega t \rangle = 0$$

Si aplicamos la definición de valor medio a la ecuación (4.46) queda,

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left( \widehat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{r}) \cdot \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \right) \tag{4.47}$$

Ya que el valor medio del segundo término es nulo.

$$\langle \Re \left( \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j2\omega t} \right) \rangle = 0$$

Escribimos las ecuaciones de Maxwell en notación fasorial:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \widehat{\mathbf{D}} = \rho \quad ; \quad \nabla \times \widehat{\mathbf{E}} = -j\omega \widehat{\mathbf{B}} = -j\omega\mu \widehat{\mathbf{H}} \\ \nabla \cdot \widehat{\mathbf{B}} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{J}} + j\omega \widehat{\mathbf{D}} \end{gathered} \tag{4.48}$$

Vamos calcular los términos del teorema de Poynting en ausencia de baterías externas y considerando la definición de valor medio definida más arriba; para ello tendremos que realizar las transformaciones correspondientes a partir de las ecuaciones de Maxwell en la forma indicada por (4.48).

Si tenemos en cuenta las ecuaciones anteriores y aplicamos la relación vectorial (C.40):

$$\nabla \cdot \left( \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^* \right) = \widehat{\mathbf{H}}^* \cdot (\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}) - \widehat{\mathbf{E}} \cdot (\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}^*)$$

Queda,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^* \right) &= -j\omega \widehat{\mathbf{B}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^* - \widehat{\mathbf{E}} \cdot \left( \widehat{\mathbf{J}} + j\omega \widehat{\mathbf{D}} \right)^* \\ &= j\omega (\widehat{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{D}}^* - \widehat{\mathbf{B}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^*) - \widehat{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{J}}^* \end{aligned}$$

Operando de forma análoga al caso de campos no sinusoidales,

$$\frac{1}{2} \int_V \widehat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{r}) \cdot \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{2} \int_V \left( -\nabla \cdot (\widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^*) + j\omega (\widehat{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{D}}^* - \widehat{\mathbf{B}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^*) \right) dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término del segundo miembro,

$$\frac{1}{2}\int_V \hat{\mathbf{J}}^*(\mathbf{r})\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})dv = -\oint_S \hat{\mathbf{S}}\cdot d\mathbf{s} + j\omega\frac{1}{2}\int_V (\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{D}}^* - \hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{H}}^*)dv \tag{4.49}$$

donde

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}^* \tag{4.50}$$

es la definición del **vector complejo de Poynting**.

Tomando la parte real de los términos del primer y segundo miembro obtenemos el teorema de Poynting para el caso de campos que varían armónicamente con el tiempo.

La parte real del vector complejo de Poynting es justamente el valor medio del vector de Poynting,

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \Re(\hat{\mathbf{S}}) \tag{4.51}$$

Si las densidades de energía eléctrica y magnética son respectivamente,

$$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \quad \text{y} \quad w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$$

Los valores medios de las densidades de energía eléctrica y magnética serán,

$$\langle w_e\rangle = \frac{1}{4}\Re(\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{D}}^*) \tag{4.52}$$

$$\langle w_m\rangle = \frac{1}{4}\Re(\hat{\mathbf{B}}\cdot\hat{\mathbf{H}}^*) \tag{4.53}$$

Sustituyendo las tres últimas ecuaciones y separando la parte real e imaginaria en la ecuación (4.49) queda,

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\int_V \Re(\hat{\mathbf{J}}^*\cdot\hat{\mathbf{E}})\,dv = -\oint_S \langle\mathbf{S}\rangle\cdot d\mathbf{s} \tag{4.54}$$

donde $\langle P\rangle$ es el valor medio de la densidad de potencia disipada por efecto Joule.

La parte imaginaria

$$-\oint_S \Im(\hat{\mathbf{S}})\cdot d\mathbf{s} = 2\omega\left(\langle w_e\rangle - \langle w_m\rangle\right) = 0 \tag{4.55}$$

*La ecuación* (4.54) *establece que el valor medio de la potencia que se intercambia dentro del volumen $V$ es igual al valor medio de la potencia transferida a*

*través de la superficie $S$ que limita el volumen $V$*. Si $\langle P \rangle$ es positiva quiere decir que el campo está suministrando energía a partículas o se está disipando energía dentro de $V$; por tanto se tiene que suministrar energía a través de la superficie $S$ mediante el flujo de energía que supone un vector de Poynting hacia el interior.

La ecuación (4.55) muestra que la parte imaginaria del valor medio de la potencia que entra en $V$ es proporcional a la diferencia entre el valor medio de las energías eléctrica y magnética almacenada en el citado volumen. Si la parte imaginaria del flujo del vector de Poynting fuera nula los valores medios de la energía eléctrica y magnética serían iguales dentro del volumen considerado. La parte imaginaria de la energía que estamos considerando se llama *energía reactiva* en teoría de circuitos. En un circuito con resistencia capacidad y autoinducción (circuito $RLC$) la parte real representa la potencia que se disipa en la resistencia y la parte imaginaria es la diferencia entre la energía almacenada en el condensador y en la autoinducción; es decir, entre la energía eléctrica y magnética.

### *Medios materiales con pérdidas*

Hasta ahora hemos considerado los campos en el vacío. Cuando se aplica un campo eléctrico a un dieléctrico homogéneo e isótropo, los dipolos y las cargas se orientan en la dirección del campo. Si dicho campo oscila de forma sinusoidal los dipolos también lo hacen, pero cuando la frecuencia de oscilación aumenta, por inercia y amortiguamiento debido a la fricción, los dipolos retrasan su oscilación con respecto al campo aplicado; este fenómeno se conoce como **relajación dieléctrica**. Como consecuencia de este proceso se producen pérdidas de energía en el dieléctrico y esto se traduce en que la permitividad no se puede expresar con una constante real. La forma de tener en cuenta este fenómeno consiste en introducir una permitividad de forma compleja, es decir, en un medio con pérdidas dieléctricas,

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

Además en el propio dieléctrico se pueden producir pérdidas debidas a la conductividad derivada de la existencia de cargas libres; este tipo de pérdidas también se incluyen en la parte imaginaria de la forma compleja de la permitividad.

En un medio magnético se produce un proceso análogo al que hemos indicado en el caso de dieléctricos, por tanto las pérdidas se expresan mediante una permeabilidad compleja,

$$\mu = \mu' - j\mu''$$

El signo menos de la parte imaginaria se introduce por que cuando calculamos el balance de energía, la que se disipa en un volumen de material es positiva; por tanto, su signo debe ser el mismo que corresponde a una conductividad, o al flujo del vector de Poynting que entra en el volumen considerado.

En estas circunstancias los distintos términos toman los valores siguientes:

$$\Re(\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{D}}^*)=\Re(\widehat{\mathbf{E}}\cdot(\varepsilon'+j\varepsilon'')\widehat{\mathbf{E}}^*)=\varepsilon'(\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{E}}^*)=\varepsilon' E^2$$

$$\Re(\widehat{\mathbf{B}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)=\Re((\mu'-j\mu'')\widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)=\mu'(\widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)=\mu' H^2$$

por tanto ahora,

$$\langle w_e\rangle=\frac{1}{4}\Re(\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{D}}^*)=\frac{1}{4}\varepsilon'(\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{E}}^*)=\frac{1}{4}\varepsilon' E^2 \tag{4.56}$$

$$\langle w_m\rangle=\frac{1}{4}\Re(\widehat{\mathbf{B}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)=\frac{1}{4}\mu'(\widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)=\frac{1}{4}\mu' H^2 \tag{4.57}$$

$$\Im(\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{D}}^*)=\Im(\widehat{\mathbf{E}}\cdot(\varepsilon'+j\varepsilon'')\widehat{\mathbf{E}}^*)=\varepsilon''(\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{E}}^*)=\varepsilon'' E^2$$

$$\Im(\widehat{\mathbf{B}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)=\Im((\mu'-j\mu'')\widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*=-\mu''(\widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)=-\mu'' H^2$$

Esto pone de manifiesto que en estos medios materiales las energías eléctrica y magnética tiene una parte real y una imaginaria, por tanto se modifican las relaciones (4.54) y (4.55), de manera que ahora,

$$\langle P\rangle=-\oint_S\langle\mathbf{S}\rangle\cdot d\mathbf{s}+\frac{1}{2}\omega\int_V(\varepsilon''\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{E}}^*+\mu''\widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)dv \tag{4.58}$$

$$-\frac{1}{2}\oint_S\Im(\widehat{\mathbf{E}}\times\widehat{\mathbf{H}}^*)\cdot d\mathbf{s}-\frac{1}{2}\omega\left(\varepsilon'(\widehat{\mathbf{E}}\cdot\widehat{\mathbf{E}}^*)-\mu'(\widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^*)\right)=0 \tag{4.59}$$

*La modificación que introducen los medios es que se añade un término en la parte real de la energía que tiene en cuenta la energía disipada en dichos medios, también conocida con el nombre de pérdidas en medios dieléctricos y magnéticos. En la parte imaginaria sigue figurando la diferencia entre los valores medios de la energía eléctrica y magnética.*

## 7. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 4.1** En el vacío, debido a las fuerzas de repulsión electrostática, se dispersa una distribución de carga de simetría esférica $\rho(r,t)$.

Calcular las corrientes de conducción y desplazamiento sobre los puntos de una esfera de radio $a$ y centro coincidente con el de simetría de la distribución de carga.

**E 4.2** Tenemos un condensador esférico como el indicado en la figura 4.2. Entre las capas conductoras existe un material de permitividad $\varepsilon$ y conductividad $\gamma$, que permite la descarga del condensador a través del medio. Consideramos el condensador inicialmente con una carga $Q_o$.

- Calcular las densidades de corriente de conducción y desplazamiento en el espacio entre capas esféricas.
- ¿Existe campo magnético entre ambas capas?

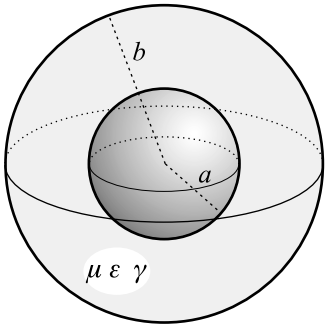



Figura E4.2

**E 4.3** Disponemos de un cable coaxial indefinido, de radio interior $a$ y exterior $b$. El material entre conductores tiene permitividad $\varepsilon_o$, conductividad $\gamma$ y permeabilidad $\mu_o$. Inicialmente sobre el conductor central existe una densidad de carga superficial $\rho_s$.

Calcular las densidades de corriente $\mathbf{J}$ y $(\partial \mathbf{D}/\partial t)$. ¿Existe un campo magnético debido a las corrientes anteriores?

**E 4.4** Por un cilindro indefinido, de radio $a$ y conductividad $\gamma$, circula una corriente cuya densidad es $\mathbf{J} = J(\rho/a)\mathbf{u}_z$.

- Calcular el vector de Poynting en función de $\rho$, para $\rho \leq a$.
- Obtener el flujo del vector de Poynting en $\rho = a$.

**E 4.5** A través de dos placas conductoras planoparalelas, dispuestas como indica la figura 4.5, se transmite una corriente $I$ a la resistencia $R_c$. En el cálculo de los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ suponemos que las placas son indefinidas y están respectivamente a los potenciales 0 y $V_o$. Además la densidad de corriente superficial es uniforme $\mathbf{K} = I/l$.

Calcular el flujo del vector de Poynting a través del rectángulo transversal MNPQ. MN $= l$ y NP $= d$.

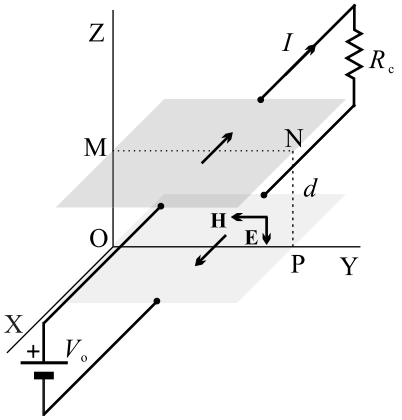



Figura E4.5

Tema 5

# ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS: PROPAGACIÓN LIBRE

## RESUMEN

### Objetivos generales

Estudiar la propagación libre del campo electromagnético en distintos medios: dieléctricos perfectos, medios con pequeñas pérdidas y medios conductores. Además estudiaremos la propagación del campo electromagnético en la frontera entre dos medios.

### Objetivos específicos

- Ecuación de ondas.
- Campos armónicos. Permitividad compleja. Factor de propagación complejo.
- Propagación de ondas planas en medios sin pérdidas. Potencia transmitida.
- Propagación en medios con pérdidas.
- Buen conductor. Profundidad de penetración.
- Dieléctrico de bajas pérdidas.
- Polarización de una onda plana.
- Paquete de ondas. Velocidad de grupo.
- Reflexión y transmisión de ondas planas: incidencia normal.
- Reflexión y transmisión de ondas planas: incidencia oblicua.

### Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial. Notación fasorial.

## INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a estudiar la propagación del campo electromagnético a través del espacio libre y en medios materiales. Veremos que, a partir de las ecuaciones de Maxwell y desacoplando los campos eléctrico y magnético, obtenemos ecuaciones de ondas para cada uno de los campos. Esto significa que el campo electromagnético se propaga en el espacio como un fenómeno ondulatorio y el estudio de esta propagación es el objetivo del presente tema. Las ondas luminosas emitidas por el sol y las transmisiones de radio emitidas por antenas de telecomunicaciones son ejemplos típicos.

Consideraremos la propagación en medios sin pérdidas, es decir, en un dieléctrico perfecto (como el aire) y en medios con pérdidas que son medios caracterizados por una conductividad finita y en los que una parte de la potencia transportada por la onda electromagnética se disipa en forma de calor, de forma que la onda se atenúa conforme se propaga.

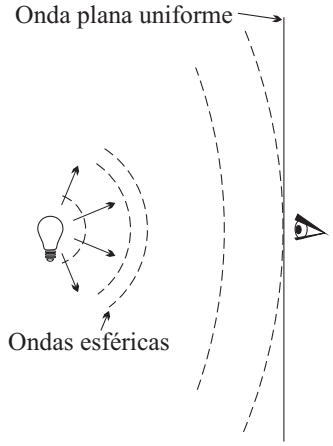



Figura 5.1. Las ondas emitidas por una fuente electromagnética presentan frentes de onda esféricos en las proximidades de la fuente, pero para un observador lejano, el frente de ondas parece aproximadamente plano

Cuando una fuente emite energía, ésta se propaga hacia fuera en forma de ondas esféricas como se ilustra en la figura 5.1. Para un observador suficientemente alejado de la fuente, el frente de ondas aparece aproximadamente plano, como si fuera una parte de una onda plana uniforme con propiedades uniformes en todos los puntos del plano tangente al frente de ondas. La propagación de

ondas planas puede describirse mediante coordenadas cartesianas con las que es más fácil trabajar matemáticamente que con las coordenadas esféricas necesarias para describir la propagación de una onda esférica. Por consiguiente, aunque en rigor una onda plana no existe, resulta una buena aproximación para estudiar la propagación de ondas desde el punto de vista físico.

## 1. ECUACIÓN DE ONDAS

De todas las posibles soluciones de la ecuación de ondas para los campos eléctrico y magnético, nos limitaremos a las más sencillas que corresponden a las denominadas ondas planas. Esto no constituye una acusada limitación ya que, como hemos comentado, las ondas esféricas se pueden considerar como planas a distancias suficientemente grandes de las fuentes porque en estas condiciones, el radio de curvatura de la superficie esférica de fase constante de la onda electromagnética es muy grande comparado con las dimensiones de la región del espacio donde se considera el campo.

Para obtener la ecuación de ondas partiremos de las ecuaciones de Maxwell y de las ecuaciones constitutivas:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{5.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{5.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.4}$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad ; \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{5.5}$$

En este tema no trataremos de relacionar las ondas con sus fuentes, cuestión que queda para más adelante. Por tanto, consideramos una región del espacio libre de cargas. Esto significa que la densidad volumétrica de carga es nula en la región que estamos considerando, $\rho = 0$. Además, suponemos que tratamos con medios lineales, homogéneos e isótropos, lo que se traduce en que tanto la permitividad eléctrica $\varepsilon$ como la permeabilidad magnética $\mu$ son escalares independientes de las coordenadas y del tiempo.

Si aplicamos el rotacional a la expresión diferencial de la ley de Faraday, ec. (5.2), y hacemos uso de la relación vectorial (C.44) tenemos

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

Puesto que estamos considerando una región del espacio libre de fuentes, $\rho = 0$, entonces el primer término de esta expresión es nulo. Teniendo en cuenta el teorema de Ampère y la ecuación constitutiva para el campo magnético, la expresión anterior queda

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$$

Finalmente, haciendo uso de las ecuaciones constitutivas (5.5), obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.6}$$

que es la ecuación de ondas homogénea para el campo eléctrico. Normalmente podremos despreciar el segundo o el tercer término dependiendo del medio que consideremos. En un medio no conductor, el segundo término se anula y queda la ecuación de ondas típica cuya solución es una onda que se propaga con velocidad $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ . En un medio conductor, el tercer término es normalmente despreciable y queda una ecuación del mismo tipo que la que rige la propagación del calor por conducción o difusión (ecuación de difusión para el campo electromagnético).

Si en lugar de aplicar el rotacional a la expresión diferencial de la ley de Faraday lo hacemos a la expresión diferencial del teorema de Ampère, ec. (5.1), obtenemos una ecuación análoga para el campo magnético y para la que son válidas las mismas consideraciones expuestas arriba.

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{5.7}$$

Podemos concluir este apartado diciendo que las ecuaciones (5.6) y (5.7) son las que rigen la propagación de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en un medio lineal, isótropo, homogéneo y libre de cargas, sea conductor o no. Ahora bien, las soluciones de estas ecuaciones de ondas deben de cumplir también las relaciones de Maxwell, ya que, aunque las ecuaciones de ondas se deducen de las de Maxwell, el recíproco no es cierto. De hecho, estas ecuaciones se han obtenido mediante procesos de diferenciación en los que se ha perdido información. En definitiva, los coeficientes de las soluciones de las ecuaciones (5.6) y (5.7) han de obtenerse aplicando las condiciones de contorno adecuadas, las cuales a su vez, son únicamente derivables de las ecuaciones de Maxwell.

## Campos armónicos

En muchos casos prácticos los campos electromagnéticos son funciones armónicas del tiempo y de hecho, si no lo son, siempre es posible descomponerlos en suma de armónicos con distinta amplitud, fase y frecuencia de acuerdo con el teorema de Fourier. Consideremos un campo electromagnético que varía armónicamente con el tiempo

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathbf{E}_o(\mathbf{r})\cos\omega t$$

$$\mathbf{H}(r,t) = \mathbf{H}_o(\mathbf{r})\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

donde, en general, el campo magnético estará desfasado con respecto al eléctrico. $\mathbf{E}_o$ y $\mathbf{H}_o$ son las amplitudes de cada uno de los campos y son, en principio, funciones de las coordenadas espaciales $\mathbf{r}$.

En estos casos, es conveniente emplear notación compleja para eliminar la dependencia temporal de forma que los campos eléctrico y magnético se representan mediante magnitudes fasoriales, $\widehat{\mathbf{E}}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$ independientes del tiempo,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o\cos\omega t \quad \rightarrow \quad \widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_o$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o\cos\left(\omega t + \varphi\right) \quad \rightarrow \quad \widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_o e^{j\varphi}$$

De esta forma, las expresiones de los campos instantáneos se obtienen añadiendo la dependencia temporal y calculando la parte real. Es decir

$$\mathbf{E}(r,t) = \Re\left\{\widehat{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\right\}$$

$$\mathbf{H}(r,t) = \Re\left\{\widehat{\mathbf{H}}e^{j\omega t}\right\}$$

Para un medio libre de cargas las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\nabla\times\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{J}} + j\omega\varepsilon\widehat{\mathbf{E}} \tag{5.8}$$

$$\nabla\times\widehat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\widehat{\mathbf{H}} \tag{5.9}$$

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.10}$$

$$\nabla\cdot\widehat{\mathbf{H}} = 0 \tag{5.11}$$

y operando de forma análoga a como se hizo al inicio de la sección, obtenemos la ecuación de ondas homogénea para el campo eléctrico

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + \left(1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)\varepsilon\mu\omega^2\widehat{\mathbf{E}} \tag{5.12}$$

y otra similar para el campo magnético.

### Permitividad compleja

A partir de la expresión (5.12) definimos la permitividad compleja como

$$\varepsilon_c = \varepsilon\left(1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right) \tag{5.13}$$

En función de este parámetro, la ecuación de ondas homogénea resulta

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + \varepsilon_c\mu\omega^2\widehat{\mathbf{E}} = 0$$

A menudo, la permitividad compleja se escribe en función de una parte real $\varepsilon'$ y una parte imaginaria $\varepsilon''$

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

con

$$\varepsilon' = \varepsilon$$
$$\varepsilon'' = \frac{\gamma}{\omega}$$

Para un medio sin pérdidas con $\gamma = 0$ se desprende que $\varepsilon'' = 0$ y $\varepsilon_c = \varepsilon' = \varepsilon$.

Por otro lado, el factor

$$k_c = \omega\sqrt{\varepsilon_c\mu} = \omega\sqrt{\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\varepsilon\mu} \tag{5.14}$$

se denomina **factor de propagación complejo** por razones que serán obvias más adelante. En función del factor de propagación complejo, la ecuación de ondas homogénea para el fasor del campo eléctrico queda

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + k_c^2\widehat{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.15}$$

y otra similar para el fasor del campo magnético.

## 2. PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN UN MEDIO SIN PÉRDIDAS

Las propiedades de propagación de una onda electromagnética están regidas, según se desprende de la ecuación (5.12) por la frecuencia angular y los tres parámetros constitutivos del medio. Si un medio es no conductor ($\gamma = 0$), la onda se propagará a través del medio sin atenuarse y entonces decimos que se trata de un medio sin pérdidas o dieléctrico perfecto. En este caso, el factor de propagación complejo se reduce a

$$k_c = k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

y la ecuación de ondas homogénea queda

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{E}} + k^2\widehat{\mathbf{E}} = 0 \tag{5.16}$$

que es la ecuación de ondas típica cuya solución es una onda que se propaga con una velociadad $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ y cuyo número de onda es $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Si expresamos el campo eléctrico en coordenadas cartesianas, cada componente del campo verificará una ecuación similar. Así, para la componente $x$ del campo eléctrico tendremos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\widehat{E}_x + k^2\widehat{E}_x = 0$$

y expresiones similares para $\widehat{E}_y$ y $\widehat{E}_z$

Como se comentó al inicio del tema, nos limitaremos a estudiar la propagación de ondas planas. Una onda plana uniforme se caracteriza porque su amplitud tienen el mismo valor en todos los puntos de cualquier plano normal a la dirección de propagación de la onda. En otras palabras, la amplitud de los campos es función únicamente de la distancia desde el origen o fuente a un plano dado. Si suponemos que la dirección de propagación de la onda es la del eje Z, por haber sólo variación en esa dirección, entonces $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ no varían con $x$ e $y$ y la ecuación de ondas para la componente $\widehat{E}_x$ queda

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^2} + k^2\right)\widehat{E}_x = 0 \tag{5.17}$$

y expresiones similares para $\widehat{E}_y$, $\widehat{H}_x$ y $\widehat{H}_y$.

Además, las componentes de los campos en la dirección de propagación son nulas. Esto es fácilmente demostrable sin más que considerar la componente $z$ del teorema de Ampère dado por (5.8),

$$\left(\frac{\partial\widehat{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\widehat{H}_x}{\partial y}\right) = j\mu w\widehat{E}_z$$

puesto que el campo magnético no varía con las coordenadas $x$ e $y$, el miembro izquierdo de esta ecuación es nulo y en consecuencia, la componente $\widehat{E}_z$ del campo eléctrico es nula.

Volviendo a (5.17), la solución general de esta ecuación diferencial viene dada por

$$\widehat{E}_x = E_{xo}^{+} e^{-jkz} + E_{xo}^{-} e^{jkz} \tag{5.18}$$

donde $E_{xo}^{+}$ y $E_{xo}^{-}$ son, en general, magnitudes complejas constantes. Si pasamos al dominio del tiempo, la solución general para la ecuación de ondas homogénea es de la forma

$$E_x(z,t) = \Re\left\{\widehat{E}_x\, e^{j\omega t}\right\} = E_{xo}^{+}\cos(\omega t - kz) + E_{xo}^{-}\cos(\omega t + kz)$$

donde el primer término representa una onda con amplitud $E_{xo}^{+}$ que se propaga en la direción $+z$, mientras el segundo término representa una onda con amplitud $E_{xo}^{-}$ que se propaga en la dirección $-z$.

Los campos eléctrico y magnético son componentes inseparables de la onda electromagnética y juegan un papel igualmente importante en su propagación. Sin embargo, cuando se trata de detectar la onda, el campo eléctrico es usualmente más importante. La razón es que la mayor parte de los detectores son más sensibles a $\mathbf{E}$ que a $\mathbf{H}$. Por ello, las consideraciones de propagación se hacen sobre el campo eléctrico, aunque todas las ecuaciones tienen su análoga para el campo magnético. Como veremos muy pronto, el campo magnético puede obtenerse siempre a partir del eléctrico y viceversa.

Para continuar nuestro análisis vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que el campo eléctrico se compone únicamente de una onda que se propaga según la dirección $+z$ y con una sola componente según el eje X, esto es

$$\widehat{\mathbf{E}}(z) = E_{xo}^{+} e^{-jkz}\mathbf{u}_x \tag{5.19}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ley de Faraday dada por (5.9), tenemos

$$\nabla\times\widehat{\mathbf{E}}(z) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_{xo}^{+}e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu\widehat{\mathbf{H}}(z)$$

de donde se desprende, teniendo en cuenta las propiedades de las ondas planas,

$$\widehat{H}_x = 0$$

$$\widehat{H}_z = 0$$

y

$$\widehat{H}_y = \frac{j}{\mu\omega}\frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial z} = \frac{k}{\mu\omega}E_{xo}^{+}e^{-jkz}$$

Como vemos la única componente del campo magnético distinta de cero es la componente $y$. Por tanto, concluimos que la solución para el campo magnético representa también una onda que se propaga en la dirección $+z$ de la forma

$$\widehat{H}_y = H_{yo}^{+}e^{-jkz}$$

y cuya amplitud viene dada por

$$H_{yo}^{+} = \frac{k}{\mu\omega}E_{xo}^{+}$$

Es decir, las amplitudes de ambos campos están relacionadas. El cociente entre la amplitud del campo eléctrico y del campo magnético tiene dimensiones de resistencia eléctrica y se denomina **impedancia intrínseca del medio** ya que depende de las características eléctricas del medio. Efectivamente

$$Z = \frac{E_{xo}^{+}}{H_{yo}^{+}} = \frac{\mu\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{5.20}$$

Para el vacío, la impedancia intríseca tiene el valor de

$$Z_o = 120\pi \quad \Omega$$

De acuerdo con esta definición, los campos de una onda plana que se propaga en un medio sin pérdidas vienen dados por

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}(z) &= \widehat{E}_x^{+} = E_{xo}^{+}e^{-jkz}\mathbf{u}_x \\ \widehat{\mathbf{H}}(z) &= \widehat{H}_y^{+} = \frac{E_{xo}^{+}}{Z}e^{-jkz}\mathbf{u}_y\end{aligned}$$

Esto es, los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. En un caso general, la amplitud del campo eléctrico $E_{xo}^{+}$ es una cantidad compleja, es decir

$$E_{xo}^{+} = \left|E_{xo}^{+}\right| e^{j\phi}$$

y los campos instantáneos vendrán dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z,t) &= \Re\left\{\widehat{\mathbf{E}}\, e^{j\omega t}\right\} = \left|E_{xo}^{+}\right| \cos\left(\omega t - kz + \phi\right) \\ \mathbf{H}(z,t) &= \Re\left\{\widehat{\mathbf{H}}\, e^{j\omega t}\right\} = \frac{|E_{xo}^{+}|}{Z} \cos\left(\omega t - kz + \phi\right) \end{aligned} \tag{5.21}$$

de donde se desprende que los campos eléctrico y magnético están en fase, es decir, tienen la misma dependencia funcional con $z$ y $t$. Así, en un punto dado, ambos campos alcanzarán los máximos y mínimos en el mismo instante. Esta propiedad es una característica de las ondas que se propagan en medios sin pérdidas. De las expresiones generales de una onda electromagnética obtenidas hasta aquí se deducen los siguientes parámetros que caracterizan la onda:

- La frecuencia de oscilación, dada por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \mathrm{s}^{-1}$$

- La longitud de onda que viene dada por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \mathrm{m}$$

- Y la velocidad de fase de la onda

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.22}$$

Si el medio es el vacío, la velocidad de fase de una onda electromagnética plana es

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} = 3 \cdot 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

que es la velocidad de la luz

### Onda plana que se propaga en una dirección arbitraria

Consideremos ahora una dirección de propagación arbitraria tal y como se muestra en la figura 5.2 donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario que indica la dirección de

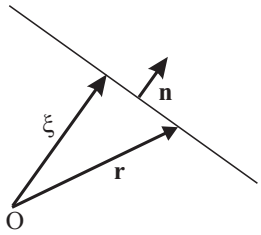



Figura 5.2. Frente de onda propagándose
en la dirección del vector **n**

propagación. Si consideramos ondas planas, entonces **n** es perpendicular al frente de ondas y, puesto que existe variación sólo en esta dirección, el operador nabla toma la forma

$$\nabla = \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

La ecuación de ondas homogénea se reduce entonces a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + k^2\right)\widehat{\mathbf{E}} = 0$$

cuya solución general es de la forma

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_o^+ e^{-jk\xi} + \mathbf{E}_o^- e^{jk\xi} \tag{5.23}$$

y análogamente para el campo magnético, obtenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + k^2\right)\widehat{\mathbf{H}} = 0$$

con

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_o^+ e^{-jk\xi} + \mathbf{H}_o^- e^{jk\xi} \tag{5.24}$$

Podemos definir el vector de propagación **k** como el vector cuyo módulo es el número de onda y cuya dirección es la dirección de propagación **n**. Entonces se verifica, como se deduce fácilmente de la figura 5.2, que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k\xi$ y las ecuaciones de Maxwell podemos escribirlas como sigue

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{E}} &= \mu\omega\widehat{\mathbf{H}} \\
\mathbf{k}\times\widehat{\mathbf{H}} &= -\varepsilon\omega\widehat{\mathbf{E}} \\
\mathbf{k}\cdot\widehat{\mathbf{E}} &= 0 \\
\mathbf{k}\cdot\widehat{\mathbf{H}} &= 0
\end{aligned}$$

De las dos últimas se deduce que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son perpendiculares al vector de propagación $\mathbf{k}$ y de las dos primeras se deduce que $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{k}$ forman un triedro directo.

De las dos primeras ecuaciones, y teniendo en cuenta que $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ obtenemos la relación que liga a ambos campos

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{n} \times \frac{\widehat{\mathbf{E}}}{Z} \qquad \text{y} \qquad \widehat{\mathbf{E}} = -Z\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{H}} \tag{5.25}$$

con

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

la impedancia intrínseca del medio definida anteriornmente. Puesto que $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ es un número real, $\widehat{\mathbf{E}}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$ están en fase.

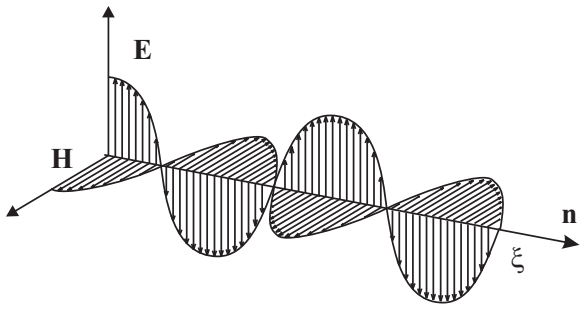



Figura 5.3. Variaciones espaciales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ para $t = 0$ en un medio sin pérdidas

En la figura 5.3 se ha representado, en un cierto instante, la variación espacial de los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$, perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación, para una onda electromagnética que se propaga en un medio sin pérdidas. Por sus características, las ondas planas se denominan también **ondas transversales electromagnéticas** (TEM). Nótese también que los campos eléctrico y magnético están en fase, es decir, ambos alcanzan los máximos y mínimos en el mismo instante.

La amplitud del campo magnético de una onda plana en el espacio libre es normalmente muy pequeña comparada con la amplitud del campo eléctrico. Efec-

tivamente, de (5.25) se desprende fácilmente que

$$B = \frac{E}{c}$$

Por tanto, si la amplitud del campo eléctrico de una onda plana es, por ejemplo, de 0,1 V/m, como es el caso de una onda de radio a unos kilómetros del transmisor, la amplitud del campo magnético es de tan sólo $3{,}3{\cdot}10^{-10}$ T.

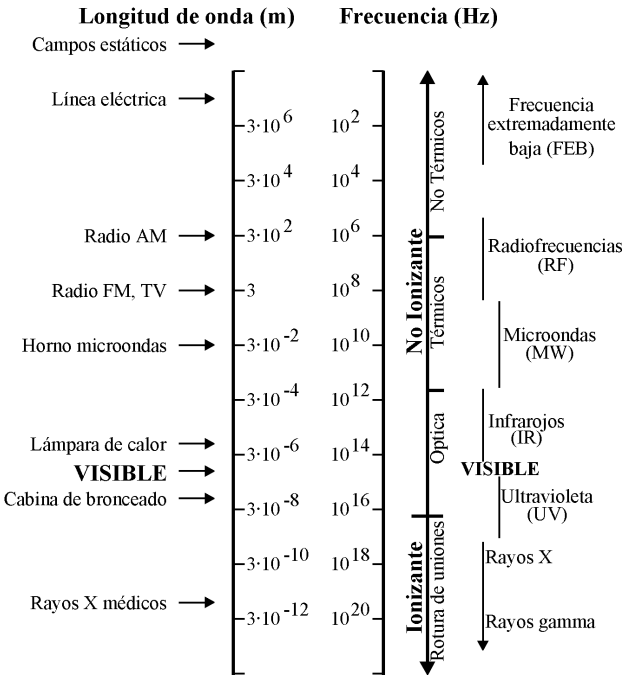



Figura 5.4. Espectro electromagnético

Es interesante resaltar que las ecuaciones de Maxwell no imponen ningún límite a la frecuencia de las ondas electromagnéticas. El espectro experimentalmente investigado, figura 5.4, se extiende de modo continuo desde las ondas largas de radio hasta los rayos gamma, observados en la radiación cósmica. Para las primeras, las frecuencias son del orden de $10^4$ Hz y las longitudes de onda, de unos $3{\cdot}10^4$ m y para las últimas, los valores correspondientes son $10^{24}$ Hz y $3{\cdot}10^{-16}$ m. Como vemos, el espectro cubre un intervalo de veinte órdenes de magnitud.

**Ejercicio de autoevaluación 5.1**

Una onda electromagnética plana se propaga en la dirección de $y > 0$. El campo eléctrico viene dado por $\mathbf{E}(y,t) = E(y,t)\mathbf{u}_z$. Las constantes del medio son $\varepsilon = 9\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$ y $\gamma = 0$. La onda varía cosenoidalmente con el tiempo con una frecuencia $f = 10^8$ Hz.

En el instante $t = 0{,}25 \times 10^{-8}$ s, se observa que se alcanza un máximo del campo en el punto $y = 0{,}5$ m.

a) Calcular la constante de propagación y la longitud de onda.

b) Expresar el campo eléctrico en función del tiempo $t$.

c) Obtener el campo magnético correspondiente.

**Solución**

1. La constante de propagación viene dada por

$$k = 2\pi f\sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi 10^8\sqrt{9\varepsilon_o\mu_o} = \frac{2\pi 10^8 \times 3}{3 \times 10^8} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

y la longitud de onda es,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ m}$$

2. Campo eléctrico. El campo eléctrico viene dado por la expresión (5.21)

$$\mathbf{E}(y,t) = \mathbf{u}_z E_o \cos(\omega t - ky + \phi)$$

Hasta ahora sólo conocemos $\omega$ y $k$. Determinamos el águlo $\phi$ utilizando los otros datos de tiempo y coordenada de observación. Para que se produzca un máximo,

$$\cos(\omega t - ky + \phi) = 1 \;\rightarrow\; (\omega t - ky + \phi) = 0$$

Sustituyendo los datos indicados en el enunciado,

$$2\pi \cdot 10^8 \times 0{,}25 \times 10^{-8} - 2\pi \cdot 0{,}5 + \theta = \frac{\pi}{2} - \pi + \phi = 0$$

de donde se deduce que,

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

La expresión pedida será,

$$\mathbf{E}(y,t) = \mathbf{u}_z E_o \cos(2\pi \cdot 10^8 t - 2\pi y + \frac{\pi}{2})$$

3. Campo magnético. La intensidad de campo magnético viene dada por (5.25)

$$\mathbf{H}(y,t) = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{Z_o} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu_o}\right)^{1/2} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$$

Llevando el valor del campo obtenido y teniendo en cuenta que $\mathbf{n} = \mathbf{u}_y$, $\varepsilon = 9\varepsilon_o$ y que $\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x$,

$$\mathbf{H}(y,t) = 3\left(\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}\right)^{1/2} \mathbf{u}_x E_o \cos(2\pi \cdot 10^8 t - 2\pi y + \frac{\pi}{2})$$

Como $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ y $\varepsilon_o = 1/(4\pi \times 9 \cdot 10^9)$,

$$\mathbf{H}(y,t) = \frac{1}{40\pi} \mathbf{u}_x E_o \cos(2\pi \cdot 10^8 t - 2\pi y + \frac{\pi}{2})$$

### Potencia transportada por una onda plana

En este apartado analizaremos el flujo de potencia transportado por una onda electromagnética que se propaga en un medio sin pérdidas. Como sabemos, el vector de Poynting, definido en (4.42) como $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, representa la potencia por unidad de área que transporta la onda. De los resultados del apartado anterior se deduce que la dirección de $\mathbf{S}$ coincide con la dirección de propagación de la onda.

Puesto que los campos son funciones del tiempo, también lo será el vector de Poynting. En la práctica nos interesa el valor medio del flujo de energía por unidad de tiempo. Si consideramos una onda plana que se propaga en un medio

sin pérdidas en la dirección $\mathbf{n}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \cos(\omega t - k\xi)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o \cos(\omega t - k\xi)$$

En este contexto es fácil demostrar que el promedio del vector de Poynting viene dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_o^T \mathbf{S}\, dt = \frac{1}{2} E_o H_o \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es la dirección de propagación de la onda.

Como ya hemos visto, cuando tratamos con señales armónicas, lo usual es pasar al dominio de la frecuencia y utilizar magnitudes fasoriales. Por ello recurrimos al vector complejo de Poynting, definido en (4.50):

$$\widehat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^*$$

donde

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_o e^{-jk\xi}$$

y

$$\widehat{\mathbf{H}}^* = \mathbf{H}_o e^{jk\xi}$$

son los fasores asociados al campo eléctrico y magnético respectivamente. Como hemos visto en la ecuación (4.51)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \Re \left( \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_o e^{-jk\xi} \times \mathbf{H}_o e^{+jk\xi} \\ &= \frac{1}{2} E_o H_o \mathbf{n} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Teniendo en cuenta la relación entre los campos eléctrico y magnético dada por (5.25), el valor promedio del vector de Poynting para una onda plana viene dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{|\widehat{\mathbf{E}}|^2}{2Z} \mathbf{n} \tag{5.27}$$

donde $\mathbf{n}$ es la dirección de propagación de la onda.

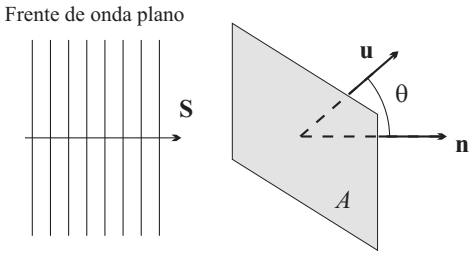



Figura 5.5. Flujo de potencia a través de una superficie $A$

Si consideramos una superficie de área $A$ con vector unitario superficial dirigido hacia fuera $\mathbf{u}$, como se muestra en la figura 5.5, la potencia total que atraviesa la superficie $A$ viene dada por

$$P = \int_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} dA$$

Para una onda plana uniforme que se propaga en una dirección $\mathbf{n}$ que forma un ángulo $\theta$ con $\mathbf{u}$, la potencia total que atraviesa la superficie $A$ será

$$P = SA\cos\theta$$

Aplicando los mismos razonamientos expuestos para el vector de Poynting, lo que nos interesa es el promedio de la potencia transmitida a través de la superficie $A$, y ésta vendrá dada por

$$\langle P \rangle = \langle S \rangle A\cos\theta \tag{5.28}$$

## 3. PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS EN MEDIOS CON PÉRDIDAS

Hasta ahora hemos considerado la propagación de ondas en medios lineales, homogéneos, isótropos y no conductores. A continuación vamos a estudiar la propagación de ondas electromagnéticas cuando el medio tiene conductividad no nula y para ello volvemos a la expresión (5.15) que es la ecuación de ondas homogénea para el caso más general, donde el factor de propagación complejo viene dado por

$$k_c = \omega\sqrt{\varepsilon_c \mu} = \omega\sqrt{\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega}\right)\varepsilon\mu}$$

Es posible expresar el factor de propagación complejo en la forma $k_c = \beta - j\alpha$. Realizando los cálculos oportunos, obtenemos

$$\beta = \omega \left[ \frac{\varepsilon' \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2} \tag{5.29}$$

$$\alpha = \omega \left[ \frac{\varepsilon' \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \tag{5.30}$$

donde $\beta$, es la constante de propagación o constante de fase y $\alpha$ es la constante de atenuación.

En este caso, la solución general a la ecuación de ondas para una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria es de la forma

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_o^+ e^{-jk_c \xi} = \mathbf{E}_o^+ e^{-\alpha \xi} \, e^{-j\beta \xi}$$

y, para el campo magnético tendremos

$$\widehat{\mathbf{H}} = (\beta - j\alpha) \frac{\mathbf{n} \times \widehat{\mathbf{E}}}{\mu \omega}$$

donde $\mathbf{n}$ es la dirección de propagación. Por tanto, las amplitudes del campo eléctrico y el magnético están relacionados por la expresión

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{E}}{Z_c} \tag{5.31}$$

siendo $Z_c$ la impedancia intrínseca del medio que, en el caso de medios conductores es una magnitud compleja

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \tag{5.32}$$

Los hechos importantes que se deducen de lo expuesto hasta aquí son los siguientes:

a) El valor no nulo de la conductividad lleva consigo una atenuación exponencial de la onda. Este resultado es razonable ya que una parte de la energía transportada por la onda electromagnética se transforma en calor como consecuencia de la conducción en el medio.

b) Los campos eléctrico y magnético ya no están en fase sino que existe un desfase que viene dado por

$$\psi = \tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta}$$

c) La velocidad de fase viene dada por la relación $v_{ph} = \omega/\beta$, estando $\beta$ determinada por la expresión (5.29). Observamos que la velocidad de fase es ahora función de la frecuencia, lo que no ocurría en dieléctricos perfectos. Los medios en los que la velocidad de fase depende de la frecuencia se llaman **medios dispersivos.**

La razón entre la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento viene dada por el cociente entre la parte imaginaria y la parte real de la permitividad compleja y es igual a

$$\frac{\mathbf{J}}{\partial\mathbf{D}/\partial t} = \frac{\gamma\mathbf{E}}{\partial\left(\varepsilon\mathbf{E}\right)/\partial t} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = -j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega} \tag{5.33}$$

En función de este cociente es posible hacer una clasificación convencional de los medios:

- Dieléctrico: $\varepsilon''/\varepsilon' \ll 1 \quad ; \qquad \gamma \ll \omega\varepsilon$
- Conductor: $\varepsilon''/\varepsilon' \gg 1 \quad ; \qquad \gamma \gg \omega\varepsilon$

Es interesante resaltar que la frecuencia juega un papel muy importante en la determinación de si un medio se comporta como un dieléctrico o como un conductor. Por ejemplo, para el cobre, que presenta una conductividad de $\gamma = 5,8 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, y una permitividad relativa $\varepsilon_r = 1$, el cociente $\varepsilon''/\varepsilon'$ es muy grande en radiofrecuencias, como corresponde a nuestra idea de que se trata de un buen conductor. Sin embargo, para frecuencias del orden $10^{20}$ Hz, correspondientes a los rayos X cortos, $\varepsilon''/\varepsilon' \simeq 0{,}01$, es decir, para esta frecuencia el cobre se comporta como un material dieléctrico.

### Propagación en medios buenos conductores

Consideremos ahora una aproximación útil que es válida para todas las frecuencias por debajo de la región óptica, para medios buenos conductores, es decir,

$\gamma \gg \omega\varepsilon$. En este caso, las constantes $\alpha$ y $\beta$ pueden aproximarse por el siguiente valor

$$\alpha = \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

y entonces el factor de propagación complejo queda

$$k_c = (1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

De esta expresión se deduce que el desfase entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ es de $45^o$. La expresión para los campos en esta aproximación es

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_o e^{-\xi/\delta}\ e^{j(\xi/\delta)} \tag{5.34}$$

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{(1-j)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\gamma}{\mu\omega}}\ \mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{E}} \tag{5.35}$$

donde el parámetro $\delta$ viene dado por

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\gamma}} \tag{5.36}$$

y es la **profundidad de penetración**, definida así porque ambos campos decrecen con la penetración cayendo a 1/e de su valor cuando $\xi = \delta$.

La profuncidad de penetración decrece si la conductividad, la permeabilidad magnética o la frecuencia aumentan, por tanto, los buenos conductores son **siempre opacos a la luz**, salvo películas extremadamente delgadas. Se debe tener en cuenta que la expresión (5.36) no puede extrapolarse a frecuencias muy grandes donde hay que trabajar con las expresiones generales para $\beta$ y $\alpha$, en las que no se ha hecho ninguna aproximación.

En los buenos conductores, la constante dieléctrica compleja y la impedancia compleja se reducen a

$$\varepsilon_c = \varepsilon\left(1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right) \simeq -j\frac{\gamma}{\omega}$$

y

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \simeq \sqrt{j\frac{\mu\omega}{\gamma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}$$

donde se ha hecho uso de la relación $\sqrt{j} = (1+j)/\sqrt{2}$. Podemos expresar $Z_c$ en forma polar

$$Z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\, e^{j\pi/4}$$

En estos casos la profundidad de penetración es muy pequeña. Por ejemplo, para el oro a la frecuencia de microondas de 3GHz $\delta = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ m. Este hecho se aprovecha en la fabricación de guías de onda. El interior de la guía se recubre de una capa muy fina de oro o plata de forma que los campos y corrientes están confinados en una capa muy estrecha en la superficie. Este es el denominado efecto **skin**.

En la tabla 5.1 se muestra el efecto skin frente a la frecuencia. La tercera columna nos da la frecuencia a la cual la corriente de conducción es igual a la corriente de desplazamiento. Las celdas sombreadas corresponden a valores no significativos para $\delta$ ya que a estas frecuencias domina la corriente de desplazamiento y por tanto las aproximaciones hechas no son válidas.

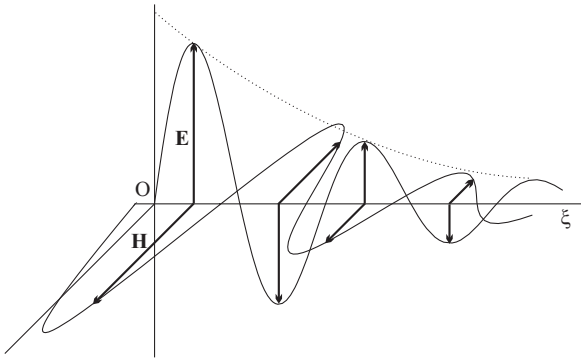



Figura 5.6. Onda propagándose en un medio conductor.

La figura 5.6 muestra la relación entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ para una onda que penetra normalmente en un metal en un instante de tiempo dado. Se observa que los campos decaen exponencialmente y que no están en fase. En realidad, la atenuación es tan grande que no puede representarse convenientemente a menos que utilicemos una escala adecuada.

Puesto que la constante de propagación viene dada por $\beta = 1/\delta$, la longitud de onda en el medio conductor es $\lambda = 2\pi\delta$, esto es, la longitud de onda disminuye drásticamente cuando una onda electromagnética pasa del espacio libre al medio conductor. Como $\alpha$ tiene el mismo valor que $\beta$, la atenuación está dada por el factor

$$e^{-2\pi\xi/\lambda}$$

de donde se desprende que a una profundidad igual a la longitud de onda, la

amplitud del campo cae a $e^{-2\pi}$, es decir, el factor de amortiguación es del orden de 1/500.

Por otra parte, la velocidad de fase está dada por $v_{ph} = \sqrt{2\omega/\mu\gamma}$ que decrece cuando aumenta la conductividad $\gamma$. En el límite, cuando $\gamma \to \infty$, la longitud de onda sería nula, $\lambda \to 0$, y la velocidad de fase también, $v_{ph} \to 0$, y por tanto no existiría onda electromagnética en el medio. Efectivamente, el campo electrostático es nulo en el interior de un conductor perfecto.

### *Energía electromagnética*

Resulta interesante analizar cómo se comportan las densidades de energía electromagnética y el vector de Poynting en el caso de medios conductores. Como sabemos, el valor promedio de la densidad de energía eléctrica viene dado por

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon E^2 \tag{5.37}$$

mientras que la densidad de energía magnética, teniendo en cuenta la relación (5.35), es

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4}\mu H^2 = \frac{\gamma E^2}{4\omega}$$

La razón entre ellas es precisamente el cociente entre la parte imaginaria y la parte real de la permitividad compleja

$$\frac{\langle w_m \rangle}{\langle w_e \rangle} = \frac{\gamma}{\varepsilon\omega} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

que es una cantidad muy grande para buenos conductores. Esto significa que la energía eléctrica dentro del conductor es despreciable frente a la magnética. Esto se debe a la elevada conductividad que provoca que la razón $\mathbf{J}/(\partial\mathbf{D}/\partial t)$ sea grande.

En cuanto al promedio del vector de Poynting dado por la relación (4.51), si tomamos las expresiones (5.34) y (5.35) para el campo eléctrico y el magnético respectivamente, tenemos

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{n}\frac{|\mathbf{E}_o|^2}{2}\, e^{-2\alpha\xi}\, \Re\left(\frac{1}{Z_c}\right)$$

Expresando $Z_c$ en forma polar

$$Z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\, e^{j\pi/4}$$

| | | | | | Efecto skin a frecuencia $f$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Material | $\gamma\,(\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1})$ | $\varepsilon_r$ | $f_o$ (Hz) | $\delta$ | 60 Hz | 10 kHz | 1MHz | 10 GHz |
| Oro | $6{,}2\cdot10^{7}$ | 1 | $1{,}1\cdot10^{18}$ | $0{,}064/\sqrt{f}$ | 8,2 mm | 0,64 mm | 0,064 mm | 0,64 $\mu$ m |
| Alumnio | $3{,}7\cdot10^{7}$ | 1 | $6{,}7\cdot10^{17}$ | $0{,}083/\sqrt{f}$ | 10,7 mm | 0,83 mm | 0,083 mm | 0,83 $\mu$ m |
| Estaño | $0{,}7\cdot10^{7}$ | 1 | $1{,}2\cdot10^{17}$ | $0{,}185/\sqrt{f}$ | 24,0 mm | 1,85 mm | 0,185 mm | 1,85 $\mu$ m |
| Cobre | $5{,}8\cdot10^{7}$ | 1 | $6{,}5\cdot10^{18}$ | $0{,}066/\sqrt{f}$ | 8,5 mm | 0,66 mm | 0,066 mm | 0,66 $\mu$ m |
| Agua de mar | 4 | 81 | $0{,}9\cdot10^{9}$ | $250/\sqrt{f}$ | 32,0 m | 2,5 m | 0,25 m | 2,5 mm |
| Agua potable | $10^{-3}$ | 81 | $0{,}2\cdot10^{6}$ | $1{,}6\cdot10^{4}/\sqrt{f}$ | 2,1 km | 160 m | 16 m | 0,16 m |
| Tierra húmeda | $10^{-3}$ | 10 | $1{,}8\cdot10^{6}$ | $1{,}6\cdot10^{4}/\sqrt{f}$ | 2,1 km | 160 m | 16 m | 0,16 m |
| Tierra seca | $10^{-5}$ | 3 | $60\cdot10^{3}$ | $1{,}6\cdot10^{5}/\sqrt{f}$ | 21,0 km | 1,6 km | 160 m | 1,6 m |

**Tabla 5.1. Profundidad de penetración del campo electromagnético para varios metales y diferentes frecuencias. Totos los materiales son no magnéticos, esto es $\mu = \mu_o$. La frecuencia $f_o$ es aquella para la que $\varepsilon''/\varepsilon' = 1$.**

tenemos finalmente

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} |\mathbf{E}_o|^2 \, e^{-2\alpha\xi} \tag{5.38}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario que indica la dirección de propagación. Como puede deducirse de la expresión anterior, mientras que los campos eléctrico y magnético se atenúan con $\xi$ como $e^{-\alpha\xi}$, la densidad media de potencia lo hace como $e^{-2\alpha\xi}$.

Es conveniente hacer un inciso respecto a las unidades en que se suele medir la atenuación. Según aparece $\alpha$ en las expresiones desarrolladas arriba, sus unidades corresponden, al igual que las de $\beta$, a [longitud]$^{-1}$. No obstante, en la práctica la **tasa de atenuación**, que representa la tasa de reducción de la potencia promedio transmitida $\langle P \rangle$ en función de la distancia de propagación, se define como

$$A = 10 \log \frac{\langle P(\xi) \rangle}{\langle P(0) \rangle} \tag{5.39}$$

y se mide en decibelios. Teniendo en cuenta (5.28) y la expresión para el promedio del vector de Poynting

$$A = 10 \log e^{-2\alpha\xi} = -20\alpha\xi \log e$$

por tanto, el coeficiente de atenuación $\alpha$, suele expresarse en dB por unidad de longitud.

Otras unidades prácticas para medir la tasa de atenuación son los neperios. En este caso, la tasa de atenuación se define como

$$A = 10 \ln \left( \frac{\langle P(\xi) \rangle}{\langle P(0) \rangle} \right) \qquad [\text{Np}] \tag{5.40}$$

entonces

$$A = 10 \ln \left( e^{-2\alpha z} \right) = -20\alpha z \qquad [\text{Np}] \tag{5.41}$$

en este caso, el coeficiente de atenuación $\alpha$, se expresa en Np por unidad de longitud. La relación entre el coeficiente de atenuación medido en dB/m y el medido en Np/m es

$$\alpha[\text{dB/m}] = 8{,}68\alpha[\text{Np/m}]$$

### *Resistencia superficial*

Para las aplicaciones prácticas a altas frecuencias es importante conocer la potencia media perdida por unidad de área en un conductor para una amplitud dada de la onda en la superficie. Esta infomación se usará para determinar la atenuación a lo largo de líneas de transmisión y guías de ondas.

Supongamos que la amplitud del campo magnético en la superficie plana de un conductor es $\mathrm{H}_o$ y que la onda incide normalmente y se propaga hacia el interior del conductor como se esquematiza en la figura 5.7. El promedio del vector de Poynting en la superficie del conductor viene dado por

$$\langle \mathbf{S}_o \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[ \widehat{\mathbf{E}}_o \times \widehat{\mathbf{H}}_o^* \right]$$

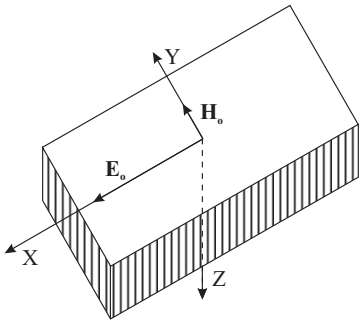



Figura 5.7. Onda sobre la superficie de un conductor.

donde las expresiones para $\widehat{\mathbf{E}}_o$ y $\widehat{\mathbf{H}}_o$ se obtienen de las expresiones generales (5.34) y (5.35) particularizando para $\xi = 0$. Tenemos entonces

$$\langle S_o \rangle = \frac{H_o^2}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{\gamma}}$$

La magnitud $(\mu\omega/\gamma)^{1/2}$ tiene dimensiones de resistencia eléctrica por lo que se denomina **resistencia superficial** y se designa por $R_S$. Con esta definición, el promedio del vector de Poynting en la superficie del conductor, que representa la potencia media absorbida por unidad de área, viene dado por

$$\langle S_o \rangle = \frac{1}{2} R_S H_o^2 \tag{5.42}$$

Esta es una expresión importante que es estrictamente válida para superficies conductoras planas, aunque representa una excelente aproximación si el radio de curvatura de la superficie es mucho mayor que la profundidad de penetración. En la práctica, este es casi siempre el caso para frecuencias altas. La pérdida total se obtiene integrando la anterior ecuación sobre la superficie del conductor.

**Ejercicio de autoevaluación 5.2**

Una onda electromagnética de frecuencia $f$, se propaga en un buen conductor de conductividad $\gamma$ y permeabilidad $\mu$. La dirección de propagación es el eje Y.

a) Calcular el vector de Poynting en el plano $y = 0$ y en otro plano, paralelo al anterior, que está a una distancia igual a la profundidad de penetración $\delta$ ($y = \delta$). Obtener la diferencia de flujo a través de un cilindro de sección $A$ y eje el de propagación.

b) Comprobar que la potencia disipada por efecto Joule en el cilindro conductor de superficie $S$ y espesor $\delta$ es igual a la diferencia entre los valores obtenidos en el apartado $a$.

**Solución**

a) Calculamos el valor medio del vector de Poynting mediante la ecuación (5.38). En el punto del eje $y = 0$,

$$\langle \mathbf{S}_o \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} |\mathbf{E}_o|^2 \, e^0 = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} E_o^2$$

En el punto $y = \delta$, dado que,

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \left( \frac{\omega\mu\gamma}{2} \right)^{-1/2}$$

el promedio del vector de Poynting será

$$\langle \mathbf{S}_1 \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{2\omega\mu} \right)^{1/2} E_o^2 \exp\left( - (2\omega\mu\gamma)^{1/2} \left( \frac{\omega\mu\gamma}{2} \right)^{-1/2} \right)$$

operando

$$\langle \mathbf{S}_1 \rangle = \mathbf{u}_y \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{2\omega\mu} \right)^{1/2} E_o^2 \, e^{-2}$$

El flujo a través del cilindro se calcula teniendo en cuenta las dos secciones de entrada y salida, ya que no hay flujo lateral por que el vector de Poynting es paralelo al eje del cilindro. La diferencia entre los dos valores es,

$$\langle P_o \rangle - \langle P_1 \rangle = (\langle \mathbf{S}_o \rangle - \langle \mathbf{S}_1 \rangle) \cdot A\mathbf{u}_y = \frac{1}{2} A E_o^2 \left( \frac{\gamma}{2\omega\mu} \right)^{1/2} (1 - e^{-2})$$

b) La potencia promedio disipada por efecto Joule viene dada por,

$$\langle P_{dis} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_V (\hat{\mathbf{J}}^* \cdot \hat{\mathbf{E}}) dv \right\}$$

Como en el conductor $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ y la conductividad es un número real,

$$\langle P_{dis} \rangle = \frac{1}{2} \gamma \Re \left\{ \int_V (\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^*) A dy \right\} = \frac{1}{2} \gamma A \Re \left\{ \int_0^\delta (\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^*) dy \right\}$$

Teniendo en cuenta la expresión para el fasor asociado al campo eléctrico y su complejo conjugado

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_o e^{-j\beta y} e^{-\alpha y}$$

$$\widehat{\mathbf{E}}^* = \mathbf{E}_o e^{j\beta y} e^{-\alpha y}$$

tenemos

$$\langle P_{dis} \rangle = \frac{1}{2} \gamma A \int_0^\delta E_o^2 e^{-2\alpha y} dy = \frac{1}{2} \gamma A E_o^2 \left[ -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha y} \right]_0^\delta$$

$$\langle P_{dis} \rangle = \frac{1}{2} \gamma A E_o^2 \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - e^{-2} \right)$$

Como,

$$\frac{\gamma}{2\alpha} = \left( \frac{\gamma}{2\omega\mu} \right)^{1/2}$$

la potencia disipada en el conductor es,

$$\langle P_{dis} \rangle = \frac{1}{2} A E_o^2 \left( \frac{\gamma}{2\omega\mu} \right)^{1/2} \left( 1 - e^{-2} \right)$$

Comparando con el valor calculado en el apartado $a$, vemos que la potencia disipada es igual a la diferencia entre el flujo del vector de Poynting que entra y sale por las dos superficie transversales del cilindro.

### 3.1. Propagación en dieléctricos con pérdidas pequeñas

En dieléctricos con pérdidas pequeñas se verifica que $\omega\varepsilon \gg \gamma$. Entonces, podemos hacer un desarrollo del factor de propagación complejo en potencias de $\varepsilon''/\varepsilon'$ y quedarnos con los tres primeros términos, esto es

$$k_c \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left[ 1 - \frac{j}{2} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} + \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \right]$$

de este modo, obtenemos las siguientes aproximaciones para la constante de atenuación y la de propagación respectivamente

$$\alpha \simeq \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\beta \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

como vemos, la constante de propagación se puede aproximar por su valor en un medio sin pérdidas. Por otro lado, la velocidad de fase viene dada por

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{-1}$$

En resumen, en un dieléctrico con pequeñas pérdidas, tanto el campo eléctrico como el magnético experimentan una pequeña atenuación ($\alpha$ es muy pequeña puesto que $\gamma$ lo es). De hecho, en la práctica, la distancia $\xi = 1/\delta$ a la cual el campo cae a 1/e de su valor incial, es normalmente muy grande. Además, la dependencia de $v_{ph}$ con $\gamma$, es muy pequeña y, por tanto, existe muy poca dispersión.

La impedancia intrínseca para estos medios viene dada por

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{1 - j\gamma/\omega\varepsilon}}$$

en la que, puesto que $\gamma/\omega\varepsilon \ll 1$, puede despreciarse la pequeña componente reactiva. Esto es, a efectos prácticos podemos considerar que la impedancia intrínseca del medio viene dada por

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

como en el caso del dieléctrico sin pérdidas.

En la tabla 5.2 se resumen las expresiones de los parámetros de propagación en varios tipos de medios.

**Ejercicio de autoevaluación 5.3**

Un submarino está encallado a una profundidad de 100 m. El técnico de comunicaciones sabe que se encuentra justo debajo de una ruta marítima de manera que puede enviar una señal de socorro. El mensaje es transmitido mediante una señal (onda plana) de 2,25 kHz. Ahora bien, el umbral mínimo de densidad de potencia que es capaz de detectar el sistema de comunicaciones de los barcos es de $20\,\mu\mathrm{W/m^2}$.

Si el submarino es capaz de emitir una señal de amplitud $E_o = 10$ V/m, ¿conseguirá hacer llegar el mensaje de socorro a algún barco? Razone la respuesta y determine: a) la densidad de potencia emitida por el submarino y b) las expresiones del campo eléctrico y magnético en función del tiempo, en un punto cualquiera entre el submarino y la superficie del mar.

Los parámetros constitutivos del agua del mar para esta frecuencia son: $\varepsilon_r = 81$; $\mu_r = 1$ y $\gamma = 4$ S/m. Datos: $\varepsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m y $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

**Solución**

Lo primero que hacemos es determinar el tipo de medio donde se propaga la

señal. Para esto, deteminamos el cociente $\varepsilon''/\varepsilon'$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = 3{,}55 \cdot 10^5 \gg 1$$

por tanto, para esta frecuencia, el agua del mar se comporta como un buen conductor y podemos utilizar las expresiones para la propagación de una onda plana en el seno de un medio conductor. Tomando como origen de coordenadas la situación del submarino, tenemos

$$\widehat{\mathbf{E}} = E_o e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \mathbf{u}_x$$

y

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{E_o}{Z_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \mathbf{u}_y$$

donde

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \gamma} \quad ; \quad Z_c = \frac{\alpha}{\gamma}(1+j)$$

El vector complejo de Poynting viene dado por

$$\widehat{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^* = \frac{E_o^2}{Z_c^*} e^{-2\alpha z}$$

y la densidad de potencia promedio viene dada por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^* \right\} = \mathbf{u}_z \frac{E_o^2}{2} e^{-2\alpha z} \Re \left\{ \frac{1}{Z_c^*} \right\}$$

Sustituyendo datos tenemos

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 2{,}5 \cdot 10^3 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 4} = 0{,}06\pi \text{ m}^{-1}$$

$$Z_c = 4{,}7 \cdot 10^{-2}(1+j) = 6{,}65 \cdot 10^{-2} e^{j\pi/4}$$

$$\Re \left\{ \frac{1}{Z_c^*} \right\} = 10{,}63\,\Omega$$

La densidad media de potencia emitida por el submarino será

$$\langle S \rangle_{z=0} = \frac{E_o^2}{2} \Re \left\{ \frac{1}{Z_c^*} \right\} = 531{,}50 \text{ W/m}^2$$

La densidad media de potencia que llega a la superficie del mar se obtiene para $z = 100$ y su valor es

$$\langle S \rangle_{z=100} = 531{,}5 e^{-2 \cdot 0{,}06\pi \cdot 100} = 2{,}25 \cdot 10^{-14} \text{ W/m}^2 = 2{,}25 \cdot 10^{-8} \, \mu\text{W/m}^2$$

En función de este resultado, podemos concluir que el submarino no será capaz de comunicarse con ningún barco ya que la señal que es capaz de emitir llega demasiado atenuada a la superficie debido a la alta conductividad del agua del mar.

Las expresiones del campo eléctrico y del campo magnético en función del tiempo en cualquier punto entre el submarino y la superficie vienen dadas por

$$\mathbf{E}(z,t) = 10 e^{-0{,}06\pi z} \cos(4{,}5\pi \cdot 10^3 \, t - 0{,}06\pi \, z) \mathbf{u}_x \quad \text{V/m}$$

$$\mathbf{H}(z,t) = 150{,}2 e^{-0{,}06\pi z} \cos(4{,}5\pi \cdot 10^3 \, t - 0{,}06\pi \, z - 0{,}25\pi) \mathbf{u}_y \quad \text{A/m}$$

| | Medio genérico | Dieléctrico sin pérdidas ($\gamma = 0$) | Dieléctrico bajas pérdidas $\varepsilon''/\varepsilon' \ll 1$ | Buen conductor $\varepsilon''/\varepsilon' \gg 1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\omega \left[ \frac{\varepsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2}$ | $0$ | $\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ | $\left( \frac{\omega\mu\gamma}{2} \right)^{1/2}$ |
| $\beta$ | $\omega \left[ \frac{\varepsilon\mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2}$ | $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ | $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ | $\left( \frac{\omega\mu\gamma}{2} \right)^{1/2}$ |
| $Z_c$ | $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left( 1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^{-1/2}$ | $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ | $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ | $(1+j)\frac{\alpha}{\gamma}$ |
| $v_{ph}$ | $\omega/\beta$ | $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ | $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ | $\left( \frac{2\omega}{\mu\gamma} \right)^{1/2}$ |

**Tabla 5.2. Expresiones para los distintos parámetros de propagación según el medio**

## 4. POLARIZACIÓN DE UNA ONDA PLANA

La polarización de una onda plana uniforme define el lugar geométrico que describe la punta del vector campo eléctrico **E** en función del tiempo, en un plano dado perpendicular a la dirección de propagación. En el caso más general este lugar geométrico será, como veremos a continuación, una elipse y entonces se dice que la onda está **elípticamente polarizada**. En ciertos casos particulares, la elipse degenera en un círculo o en una línea recta y en estos casos el estado de polarizacion es **circular** o **lineal** respectivamente.

Para analizar los estados de polarización de una onda plana partimos de la expresión general de una onda plana que se propaga en la dirección positiva del eje Z, de forma que el campo eléctrico será

$$\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{E}_x \mathbf{u}_x + \widehat{E}_y \mathbf{u}_y$$

con

$$\widehat{E}_x = E_{xo} e^{-jkz}$$

y

$$\widehat{E}_y = E_{yo} e^{-jkz}$$

donde $E_{xo}$ y $E_{yo}$ son las amplitudes complejas de los fasores $\widehat{E}_x$ y $\widehat{E}_y$ respectivamente, cada una caracterizada por su módulo y fase.

La fase de una onda se define siempre con respecto a una punto de referencia que puede ser, por ejemplo, $z = 0$, $t = 0$. La polarización de la onda va a depender de la diferencia de fase entre las componentes del campo eléctrico. Por conveniencia se considera $E_{xo}$ como referencia de fases (es decir, se le asigna fase cero) y se designa con $\varphi$ la diferencia de fase de $E_{yo}$ con respecto a $E_{xo}$. Según esto, tendremos

$$E_{xo} = |E_{xo}|$$

y

$$E_{yo} = |E_{yo}| e^{j\varphi}$$

De esta forma, el campo eléctrico queda

$$\widehat{\mathbf{E}} = \left( |E_{xo}| \mathbf{u}_x + |E_{yo}| e^{j\varphi} \mathbf{u}_y \right) e^{-jkz}$$

El campo eléctrico instantáneo será

$$\mathbf{E}(z,t) = \Re \left( \widehat{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right) = |E_{xo}| \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x + |E_{yo}| \cos(\omega t - kz + \varphi) \mathbf{u}_y$$

y sus componentes

$$E_x = A\cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = B\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

donde hemos designado por $A$ y $B$ las amplitudes de las componentes $E_x$ y $E_y$ respectivamente para simplificar la notación. Si elevamos al cuadrado ambas expresiones y sumamos, aplicando sencillas relaciones trigonométricas obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{B^2} - \frac{2E_xE_y}{AB}\cos\varphi = \text{sen}^2\,\varphi \tag{5.43}$$

que nos indica que el lugar geométrico de la punta del vector campo eléctrico es una elipse en el plano XY tal como se muestra en la figura 5.8.

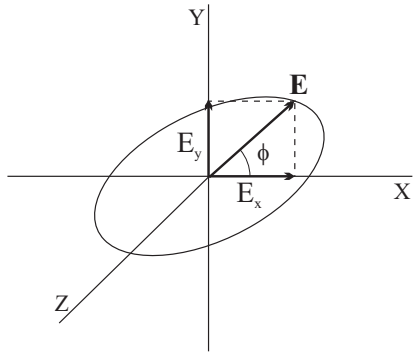



Figura 5.8. Campo elipticamente polarizado

Por tanto, el vector campo eléctrico irá variando con el tiempo y su extremo irá recorriendo la elipse de la figura. El ángulo que forma el vector campo eléctrico, **E**, con su componente sobre el eje X, en un instante dado, viene dado por

$$\phi = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)$$

Podemos determinar la velocidad angular del vector **E** que vendrá dada por

$$\frac{d\phi}{dt} = \cos^2\phi\frac{E_y'E_x - E_yE_x'}{E_x^2} = \frac{E_y'E_x - E_yE_x'}{|E|^2}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\cos\phi = E_x/|E|$. Teniendo en cuenta las expresiones para las componentes del campo y después de sencillos cálculos empleando relaciones trigonométricas, obtenemos

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{AB}{|E|^2}\omega \operatorname{sen}\varphi$$

con $\varphi$ el desfase entre las componentes del campo eléctrico. De aquí se deduce que

Para $0 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} < 0$ El sentido de rotación es horario

Para $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0 \quad \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} > 0$ El sentido de rotación es antihorario

Si el desfase entre las dos componentes del campo es un múltiplo impar de $\pi/2$, entonces la ecuación de la elipse (5.43) se reduce a

$$\frac{E_x^2}{A^2} + \frac{E_y^2}{B^2} = 1$$

es decir, en este caso se trata de una elipse cuyos ejes están en las direcciones de los ejes coordenados X e Y.

## 4.1. Polarización circular

Consideremos el caso particular en que las amplitudes de las componentes del campo eléctrico sean iguales y el desfase entre ambas sea $\pm\pi/2$, esto es

$$E_x = A\cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = A\cos(\omega t - kz \pm \pi/2)$$

En este caso la ecuación (5.43) se reduce a

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2$$

que es la ecuación de una circunferencia cuyo radio coincide con el módulo del campo eléctrico. En este caso, el ángulo que forma el vector campo eléctrico con el eje X viene dado por

$$\phi = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \arctan\left(\frac{A\cos(\omega t - kz \pm \pi/2)}{A\cos(\omega t - kz)}\right) = \mp(\omega t - kz)$$

de donde

$$\frac{d\phi}{dt} = \mp\omega$$

Por tanto, si el desfase es $-\pi/2$, el sentido de rotación del vector campo eléctrico es el sentido antihorario y estaremos ante una **onda circularmente polarizada de mano derecha** (cuando el pulgar de la mano derecha apunta hacia la dirección de propagación, los otros cuatro dedos se cierran en la dirección de rotación del campo eléctrico) o con polarización positiva[1]. Si por el contrario, el desfase es $+\pi/2$ el sentido de rotación será el de las manecillas del reloj y diremos que se trata de una **onda circularmente polarizada de mano izquierda** o con polarización negativa. En la figura 5.9 se representan las dos situaciones.

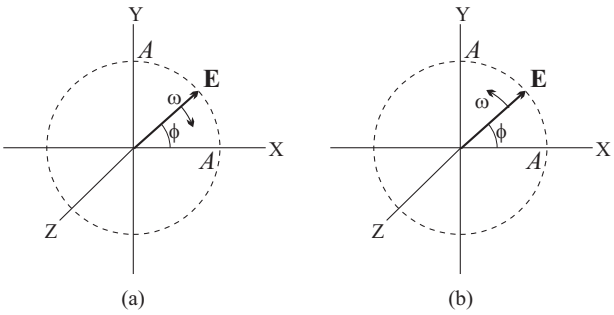



Figura 5.9. Onda circularmente polarizada
a) a izquierdas; b) a derechas.

## 4.2. Polarización lineal

Otro caso particular del estado de polarización de una onda es cuando el desfase entre las componentes del campo es $\pm\pi$, esto es

$$E_x = A\cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = \pm B\cos(\omega t - kz)$$

[1] la dirección de propagación es la de penetración de un tornillo que gira en el mismo sentido del campo.

es decir, las componentes del campo **están en fase** ($\varphi = 0$) o en **oposición de fase** ($\varphi = \pi$). En este caso la ecuación (5.43) se reduce a

$$\left[\frac{E_x^2}{A^2} \pm \frac{E_y^2}{B^2}\right]^2 = 0$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el origen. Decimos, entonces, que la onda está **linealmente polarizada**. En la figura 5.10 se ilustra la situación. El ángulo que forma el vector campo eléctrico con el eje X es constante en el tiempo y viene dado por

$$\tan\phi = \frac{E_y}{E_x} = \pm\frac{B}{A}$$

Finalmente, si $A = B$, el campo eléctrico formará un ángulo de $45^o$ con el eje X.

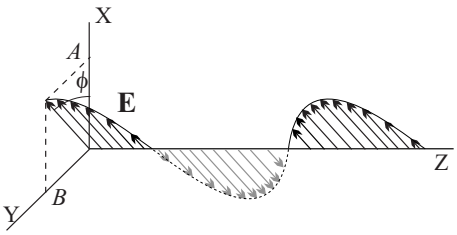



Figura 5.10. Onda linealmente polarizada.

**Ejercicio de autoevaluación 5.4**

Una onda plana circularmente polarizada a izquierdas con módulo de campo eléctrico de 4V/m, viaja en la dirección del eje X en un medio no magnético y sin pérdidas. La frecuencia de la onda es de 1000 MHz y la velocidad de fase $v_{ph} = c/3$. Suponga que para $x = 0; t = 0$ el campo eléctrico sólo tiene componente en la dirección del eje Y. Determine las expresiones para el campo eléctrico y el campo magnético; la impedancia característica del medio y la expresión para el vector de Poynting en el plano $x = 2$ cm.

**Solución**

La longitud de onda de la señal es

$$\lambda = \frac{v_{ph}}{f} = \frac{c/3}{10^9} = 0,1 \text{ m}$$

y la constante de propagación

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 20\pi$$

Teniendo en cuenta la expresión para la velocidad de fase de una onda en un medio de permitividad $\varepsilon$ y permeabilidad $\mu_o$, podemos obtener la permitividad relativa del medio que resulta

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_o}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \Rightarrow \varepsilon_r = 9$$

y por tanto, la impedancia característica del medio será

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon}} = \frac{Z_o}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 40\pi$$

Una vez determinados estos parámetros, podemos escribir las expresiones para el campo eléctrico y magnético. Puesto que la onda se propaga en la dirección del eje X, el campo eléctrico tendrá componente $y$ y $z$, y como la onda está circularmente polarizada, las amplitudes de las componentes en los dos ejes son iguales y el desfase entre ambas es igual a $\pi/2$. Por tanto, para el campo eléctrico tendremos

$$\mathbf{E}(x) = 4\left[\mathbf{u}_y \cos(2\pi(10^9 t - 10x)) - \mathbf{u}_z \operatorname{sen}(2\pi(10^9 t - 10x))\right]$$

que está polarizada a izquierdas ya que el ángulo del vector de campo con el eje Y viene dado por

$$\tan\phi = \frac{E_z}{E_y} = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi(10^9 t - 10x))}{\cos(2\pi(10^9 t - 10x))} \Rightarrow \phi = -(10^9 t - 10x)$$

y podemos observar que para un punto del eje X dado, el ángulo $\phi$ disminuye al aumentar el tiempo.

El campo magnético viene dado por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z}\mathbf{u}_x \times \mathbf{E}$$

Haciendo los productos vectoriales, obtenemos

$$\mathbf{H}(x) = \frac{1}{10\pi}\left[\mathbf{u}_y \operatorname{sen}(2\pi(10^9 t - 10x)) + \mathbf{u}_z \cos(2\pi(10^9 t - 10x))\right]$$

El vector de Poynting viene dado por

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Sustituyendo las expresiones para los campos

$$\mathbf{S} = \frac{4}{10\pi}\mathbf{u}_x\left[\cos^2(2\pi(10^9 t - 10x)) + \operatorname{sen}^2(2\pi(10^9 t - 10x))\right]$$

En el punto del plano $x = 0{,}02$ m, tendremos

$$\mathbf{S} = \frac{2}{5\pi}\mathbf{u}_x\left[\cos^2(2\pi(10^9 t - 0{,}2)) + \operatorname{sen}^2(2\pi(10^9 t - 0{,}2))\right]$$

y el promedio temporal del vector de Poynting en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación será

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2}{5\pi}\mathbf{u}_x$$

## 5. PAQUETE DE ONDAS. VELOCIDAD DE GRUPO.

En las secciones anteriores hemos encontrado soluciones a las ecuaciones de Maxwell en forma de ondas planas y hemos analizado sus propiedades. Se trataron sólo ondas monocromáticas, que tienen una frecuencia y un número de onda definidos.

En circunstancias reales estas soluciones idealizadas no se presentan. Por una parte, porque la onda plana no existe en la realidad. Una onda plana es un proceso rigurosamente periódico en el espacio y en el tiempo y, por tanto, de existir tendría una extensión infinitamente grande en el espacio y una duración infinitamente grande en el tiempo. Por otra parte, porque no existen emisores rigurosamente

monocromáticos. Aún con la fuente de luz más monocromática (el láser) o el transmisor o receptor de radio mejor sintonizado, siempre tendremos un conjunto de frecuencias finito (aunque posiblemente sea muy pequeño). El efecto de amortiguamiento se traduce en la emisión de frecuencias diferentes de la frecuencia propia $\omega_o$ (si bien próximas a ésta).

En consecuencia, para tratar de describir matemáticamente los procesos ondulatorios reales, parece lógico estudiar el resultado de la superposición o interferencia de diferentes ondas monocromáticas. Como las ecuaciones básicas son lineales, en principio resulta una cuestión elemental construir una superposición lineal apropiada de un conjunto de ondas planas con diferentes frecuencias. No obstante, en este planteamiento hay otro aspecto que tenemos que considerar. Si el medio es dispersivo, esto es, si la permitividad eléctrica del medio es función de la frecuencia de la señal, entonces la velocidad de fase no es la misma para cada una de las componentes en frecuencia de la señal. Como consecuencia, las diferentes componentes de la señal viajan con velocidades distintas y tienden a cambiar de fase unas con respecto a otras. En un medio muy dispersivo la velocidad de flujo de energía puede diferir mucho de la velocidad de fase, o puede incluso carecer de significado preciso. Por este motivo, en el estudio que vamos a hacer a continuación trataremos medios poco dispersivos.

Una vez analizado el problema real, consideremos un proceso ondulatorio formado por la superposición de una infinidad de ondas planas monocromáticas que se propagan en la dirección positiva del eje Z y cuyas frecuencias varían de modo continuo en un estrecho intervalo

$$[\omega_o - \triangle\omega \leq \omega \leq \omega_o + \triangle\omega \leq]$$

donde $\omega_o$, que es la **frecuencia portadora**, satisface la condicción

$$\omega_o \gg \triangle\omega$$

es decir, consideramos un intervalo muy próximo a la frecuencia central.

Suponemos también que la amplitud de todas las ondas es igual. La intensidad total del campo eléctrico viene dada por la suma de las intensidades para cada una de las frecuencias del intervalo dado, esto es

$$E(z,t) = \int_{\omega_o - \triangle\omega}^{\omega_o + \triangle\omega} E_o e^{j(\omega t - kz)} d\omega \tag{5.44}$$

Puesto que consideramos medios poco dispersivos, aunque el factor de propagación $k$ es función de la frecuencia (a través de $\varepsilon$), variará poco con la misma y por

tanto podemos hacer un desarrollo en serie en torno a la frecuencia portadora y quedarnos únicamente con el primer término del desarrollo

$$k \simeq k_o + \left|\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_o} (\omega - \omega_o) \tag{5.45}$$

Sustituyendo en la expresión (5.44), tenemos

$$E(z,t) = E_o \int_{\omega_o - \triangle\omega}^{\omega_o + \triangle\omega} e^{j(\omega_o t - k_o z)} e^{j(\omega - \omega_o)\left(t - |dk/d\omega|_o z\right)}\, d\omega$$

donde se ha utilizado $\omega = \omega_o + (\omega - \omega_o)$. Sacando fuera la exponencial que no depende de la frecuencia y haciendo el cambio de variable $u = \omega - \omega_o$, obtenemos

$$E(z,t) = E_o e^{j(\omega_o t - k_o z)} \int_{-\triangle\omega}^{+\triangle\omega} e^{ju\left(t - |dk/d\omega|_o z\right))} du$$

Cuya integración da

$$E(z,t) = E_o e^{j(\omega_o t - k_o z)} \frac{\left[e^{j\triangle\omega\left(t - |dk/d\omega|_o z\right)} - e^{-j\triangle\omega\left(t - |dk/d\omega|_o z\right]}\right)}{j\left(t - |dk/d\omega|_o\, z\right)}$$

o lo que es igual

$$E(z,t) = 2E_o \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left[\triangle\omega\left(t - |dk/d\omega|_o\, z\right)\right]}{\left(t - |dk/d\omega|_o\, z\right)} \right\} e^{j(\omega_o t - k_o z)}$$

Este resultado se interpreta de la siguiente forma: el grupo de ondas interfiere formando lo que llamamos **paquete de ondas**, que está formado por un fenómeno ondulatorio de frecuencia $\omega_o$, número de onda $k_o$ y velocidad de fase $v_{ph} = \omega_o/k_o$, pero con una amplitud modulada

$$A = 2E_o \frac{\operatorname{sen}\left[(\triangle\omega/v_g)(z - v_g t)\right]}{\left[v_g^{-1}(z - v_g t)\right]}$$

que se propaga a una velocidad llamada **velocidad de grupo** y que viene dada por la expresión

$$v_g = \frac{1}{\left|\frac{dk}{d\omega}\right|_o} \tag{5.46}$$

La amplitud modulada presenta un máximo principal muy pronunciado en el punto $z_{\text{máx}} = v_g t$, cuyo valor es $A_{\text{máx}} = 2\triangle\omega E_o$, como se muestra en la figura 5.11

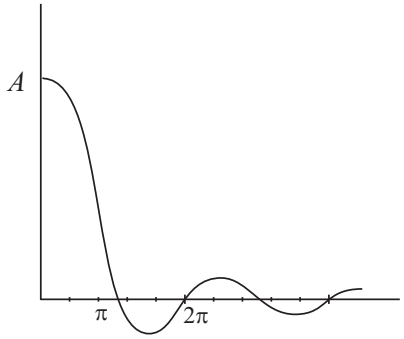



Figura 5.11. Amplitud de un paquete de ondas

A uno y otro lado del punto donde se alcanza el máximo, el valor de la amplitud modulada disminuye y se anula en los puntos en los cuales se verifica

$$\frac{\triangle\omega}{v_g}(z - v_g t) = \pm\pi$$

Junto con el máximo principal, la amplitud modulada presenta un número infinito de máximos secundarios cuya magnitud es muy pequeña comparada con el principal y que disminuye rápidamente al aumentar el argumento. Prácticamente se puede considerar que el campo electromagnético está excitado tan sólo cerca del máximo principal, mientras que en el resto del espacio la superposición de las ondas es destructiva.

La amplitud del paquete de ondas se desplaza en el espacio con una velocidad de grupo $v_g$ y el paquete conserva una extensión limitada en el espacio siempre que el medio no sea muy dispersivo. Mientras la velocidad de fase

$$v_{ph} = \frac{\omega_o}{k_o}$$

es la velocidad con la que se desplaza la superficie de fase constante del proceso ondulatorio. Puesto que la energía transmitida por una onda electromagnética depende de la amplitud de la misma, es evidente que la energía de un paquete de ondas se transmite a la velocidad de grupo, $v_g$.

Las dimensiones de un paquete de ondas son tales que se cumple la relación

$$\triangle\omega \left[ t - z \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_o} \right] \approx 2\pi \tag{5.47}$$

Para poder entender de una forma más intuitiva el significado de esta ecuación vamos a determinar las dimensiones espaciales del paquete. En un instante dado $t_o$, el campo se anula en los puntos $z_1$ y $z_2$ que verifican

$$\text{sen}\,[(\triangle\omega/v_g)(z - v_g t)] = 0$$

que equivale a

$$(\triangle\omega/v_g)(z_1 - v_g t_o) = -\pi \qquad \text{y} \qquad (\triangle\omega/v_g)(z_2 - v_g t_o) = \pi$$

Por tanto, el campo es diferente de cero en el intervalo definido por estos puntos, esto es

$$\triangle z = z_2 - z_1 = \frac{2\pi}{\triangle\omega\,|dk/d\omega|_o}$$

ahora bien, de (5.45) tenemos

$$\triangle\omega \left|\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_o} = \triangle k$$

por tanto

$$\triangle z = \frac{2\pi}{\triangle k}$$

Luego, fuera de esta región el campo tiene un valor próximo a cero.

Del mismo modo, si ahora fijamos una determinada posición, por ejemplo $z = z_o$, el intervalo de tiempo durante el cual la amplitud del paquete de ondas difiere de cero es igual a

$$\triangle t \approx \frac{2\pi}{\triangle\omega}$$

Así pues, un paquete de ondas tiene unas dimensiones limitadas en el espacio y en el tiempo que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\triangle t \triangle\omega \approx 2\pi \qquad ; \qquad \triangle z \triangle k \approx 2\pi$$

Podemos ahora modificar el planteamiento del problema. Supongamos que se trata de obtener un campo electromagnético diferente de cero en determinada región del espacio $\triangle z$. Para construir este campo a partir de ondas monocromáticas es necesario formar un paquete de ondas.

Si las dimensiones del paquete son las dadas por la condición (5.47) hay que efectuar la superposición de ondas monocromáticas con números de onda que

pertenecen a un intervalo $\triangle k$. Cuanto más estrecho es el paquete, es decir, cuanto menores son sus dimensiones espaciales, tanto mayor tendrá que ser $\triangle k$, es decir, tanto mayor deberá ser el intervalo de longitudes de onda que debe participar en la formación del paquete.

De manera análoga, si queremos que exista una señal electromagnética con una duración $\triangle t$ en el tiempo, implicará el concurso de ondas monocromáticas en un intervalo $\triangle \omega$. Cuanto menor es la duración que se impone a la señal (paquete), tanto mayor es el intervalo de frecuencias $\triangle \omega$ de las ondas monocromáticas que han de formarlo.

Estos resultados poseen un gran valor fundamental y práctico. Una onda monocromática del todo homogénea y que se extiende infinitamente en el espacio y en el tiempo no existe, como hemos indicado anteriormente. Sin embargo, mediante un emisor cuyo amortiguamiento sea suficientemente pequeño y que radie durante un tiempo suficientemente largo se pueden formar en el espacio ondas que, por sus propiedades, son prácticamente monocromáticas.

## 6. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS PLANAS: INCIDENCIA NORMAL

Cuando una onda plana que se propaga en un medio se encuentra con una frontera que separa este medio de otro con parámetros dieléctricos diferentes, parte de la onda se refleja y otra parte se transmite a través de la frontera entre los medios. Vamos a considerar la situación ilustrada en la figura 5.12.

El medio 1 definido para $z \leq 0$ está caracterizado por los parámetros $\varepsilon_1$ y $\mu_1$, y el medio 2 definido para $z \geq 0$ está caracterizado por los parámetros $\varepsilon_2$ y $\mu_2$. Suponemos medios dieléctricos sin pérdidas. Una onda plana incidente polarizada en la dirección $x$ se propaga en dirección $z$ e incide normalmente en la superficie de separación de los medios. Las expresiones fasoriales para los campos de la onda incidente vienen dadas por

$$\widehat{\mathbf{E}}^i(z) = \mathbf{u}_x E_o^i \, e^{-jk_1 z} \tag{5.48}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}^i(z) = \mathbf{u}_z \times \frac{\widehat{\mathbf{E}}(z)}{Z_1} = \mathbf{u}_y \frac{E_o^i}{Z_1} \, e^{-jk_1 z} \tag{5.49}$$

con $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ el número de onda o factor de propagación en el medio 1 y $Z_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$ la impedancia característica o intrínseca de dicho medio.

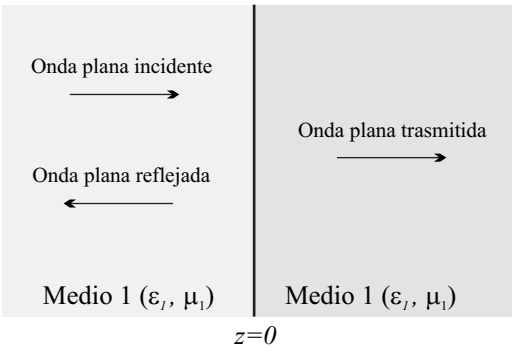



Figura 5.12. Onda plana incidiendo normalmente a la frontera de separación de dos medios

Las expresiones para las ondas reflejada y transmitida serán, de acuerdo con la figura 5.13, las siguientes

$$\widehat{\mathbf{E}}^r(z) = \mathbf{u}_x E_o^r \, e^{jk_1 z} \tag{5.50}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}^r(z) = (-\mathbf{u}_z) \times \frac{\widehat{\mathbf{E}}^r(z)}{Z_1} = -\mathbf{u}_y \frac{E_o^r}{Z_1} \, e^{jk_1 z} \tag{5.51}$$

$$\widehat{\mathbf{E}}^t(z) = \mathbf{u}_x E_o^t \, e^{-jk_2 z} \tag{5.52}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}^t(z) = \mathbf{u}_z \times \frac{\widehat{\mathbf{E}}^t(z)}{Z_2} = \mathbf{u}_y \frac{E_o^t}{Z_2} \, e^{-jk_2 z} \tag{5.53}$$

Las cantidades $E_o^i$, $E_o^r$ y $E_o^t$ son las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y transmitida. Nuestro objetivo es encontrar expresiones para las amplitudes reflejada y transmitida en función de la amplitud de la onda incidente que se supone conocida. Para ello, aplicamos las condiciones de frontera para el campo eléctrico y el campo magnético en el límite de separación de dos medios teniendo en cuenta que, tal y como se muestra en la figura 5.13, tanto el campo eléctrico como el campo magnético son tangenciales a la superficie de separación de los medios.

Las condiciones de frontera para los campos eléctrico y magnético establecen que:

a) Las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas.

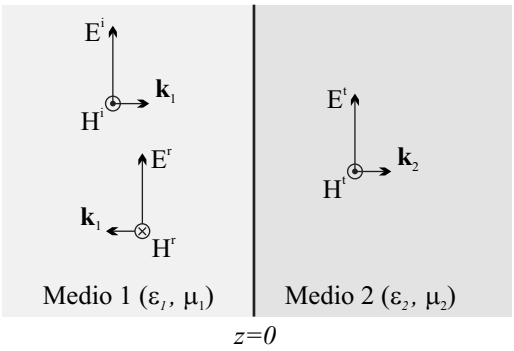



Figura 5.13. Ondas incidente, reflejada y transmitida
en la frontera de separación de dos medios dieléctricos

b) Si no existen corrientes superficiales, las componentes tangenciales del campo magnético son continuas.

Según se deduce de la figura 5.13 el campo total en el medio 1 es la suma de la onda incidente y la onda reflejada, esto es

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_1(z) &= \widehat{\mathbf{E}}^i(z) + \widehat{\mathbf{E}}^r(z) = \mathbf{u}_x \left( E_o^i\, e^{-jk_1 z} + E_o^r\, e^{+jk_1 z} \right) \\ \widehat{\mathbf{H}}_1(z) &= \widehat{\mathbf{H}}^i(z) + \widehat{\mathbf{H}}^r(z) = \mathbf{u}_y \left( H_o^i\, e^{-jk_1 z} - H_o^r\, e^{+jk_1 z} \right) \end{aligned} \tag{5.54}$$

mientras que en el medio 2 sólo existe la onda transmitida

$$\widehat{\mathbf{E}}_2(z) = \widehat{\mathbf{E}}^t(z) = \mathbf{u}_x E_o^t\, e^{-jk_1 z} \tag{5.55}$$

En la frontera de separación de los dos medios, $z = 0$, las componentes tangenciales de ambos campos se conservan. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_1(0) = \widehat{\mathbf{E}}_2(0) &\Rightarrow E_o^i + E_o^r = E_o^t \\ \widehat{\mathbf{H}}_1(0) = \widehat{\mathbf{H}}_2(0) &\Rightarrow H_o^i - H_o^r = H_o^t \end{aligned} \tag{5.56}$$

Teniendo en cuenta que

$$H_o^i = \frac{E_o^i}{Z_1} \quad ; \quad H_o^r = \frac{E_o^r}{Z_1} \quad ; \quad H_o^t = \frac{E_o^t}{Z_2}$$

Obtenemos las siguientes expresiones para $E_o^r$ y $E_o^t$ en función de $E_o^i$

$$E_o^r = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right) E_o^i$$

y

$$E_o^t = \left(\frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}\right) E_o^i$$

que nos permiten definir los denominados **coeficiente de reflexión** y **coeficiente de transmisión** respectivamente.

$$\Gamma = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right) \tag{5.57}$$

y

$$\tau = \frac{E_o^t}{E_o^i} = \left(\frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}\right) \tag{5.58}$$

Para medios dieléctricos sin pérdidas, tanto $Z_1$ como $Z_2$ son cantidades reales, por tanto, $\Gamma$ y $\tau$ también lo son. Para medios conductores las expresiones (5.57 ) y (5.58) son igualmente aplicables sólo que en este caso las impedancias características de los medios pueden ser complejas.

Los coeficientes de reflexión y de transmisión está interrelacionados mediante la expresión

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{5.59}$$

En función de estos coeficientes, los campos a cada lado de la frontera vienen dados por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_1(z) &= \mathbf{u}_x E_o^i \left(e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{+jk_1 z}\right) \\ \widehat{\mathbf{H}}_1(z) &= \mathbf{u}_y H_o^i \left(e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{+jk_1 z}\right) \end{aligned} \tag{5.60}$$

en el medio 1, y

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_2(z) &= \mathbf{u}_x \tau E_o^i \, e^{-jk_2 z} \\ \widehat{\mathbf{H}}_2(z) &= \mathbf{u}_y \tau H_o^i \, e^{-jk_2 z} \end{aligned} \tag{5.61}$$

en el medio 2

## 6.1. Balance de potencia

Para llevar a cabo un balance de potencia determinaremos la densidad de potencia promedio neta que fluye a cada lado de la frontera. Para el medio 1 tenemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}_1 \rangle &= \frac{1}{2}\Re\left(\widehat{\mathbf{E}}_1(z)\times\widehat{\mathbf{H}}_1^*(z)\right)\\ &= \frac{1}{2}\Re\left[\mathbf{u}_x E_o^i\left(e^{-jk_1z}+\Gamma e^{jk_1z}\right)\times\mathbf{u}_y\frac{E_o^{i*}}{Z_1^*}\left(e^{jk_1z}-\Gamma^* e^{-jk_1z}\right)\right]\\ &= \mathbf{u}_z\frac{\left|E_o^i\right|^2}{2}\left(1-|\Gamma|^2\right)\Re\left\{\frac{1}{Z_1^*}\right\} \qquad (5.62)\end{aligned}$$

El primer término de esta expresión representa la densidad de potencia promedio transportada por la onda incidente, mientras que el segundo término representa la densidad de potencia promedio transportada por la onda reflejada. Es decir

$$\langle \mathbf{S}_1 \rangle = \langle \mathbf{S}^i \rangle + \langle \mathbf{S}^r \rangle$$

con

$$\langle \mathbf{S}^i \rangle = \mathbf{u}_z\frac{\left|E_o^i\right|^2}{2}\Re\left\{\frac{1}{Z_1^*}\right\} \qquad (5.63)$$

y

$$\langle \mathbf{S}^r \rangle = -\mathbf{u}_z|\Gamma|^2\frac{\left|E_o^i\right|^2}{2}\Re\left\{\frac{1}{Z_1^*}\right\} \qquad (5.64)$$

Si tratamos con medios dieléctricos sin pérdidas, tanto el coeficiente de reflexión como las impedancias características de los medios serán reales.

La densidad de potencia transportada por la onda transmitida al medio 2 será

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}_2 \rangle &= \frac{1}{2}\Re\left(\widehat{\mathbf{E}}_2(z)\times\widehat{\mathbf{H}}_2(z)\right)\\ &= \frac{1}{2}\Re\left[\mathbf{u}_x\tau E_o^i\, e^{-jk_2z}\times\mathbf{u}_y\frac{E_o^{i*}}{Z_2^*}\, e^{jk_2z}\right]\\ &= \mathbf{u}_z|\tau|^2\frac{\left|E_o^i\right|^2}{2}\Re\left\{\frac{1}{Z_2^*}\right\} \qquad (5.65)\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de las expresiones (5.57) y (5.58) es posible comprobar que, para medios dieléctricos sin pérdidas, se cumple la siguiente relación

$$\frac{\tau^2}{Z_2} = \frac{1-\Gamma^2}{Z_1}$$

con lo cual, se verifica

$$\langle \mathbf{S}_1 \rangle = \langle \mathbf{S}_2 \rangle$$

que es el resultado esperado de conservación de la densidad de potencia cuando la onda electromagnética se propaga en medios sin pérdidas.

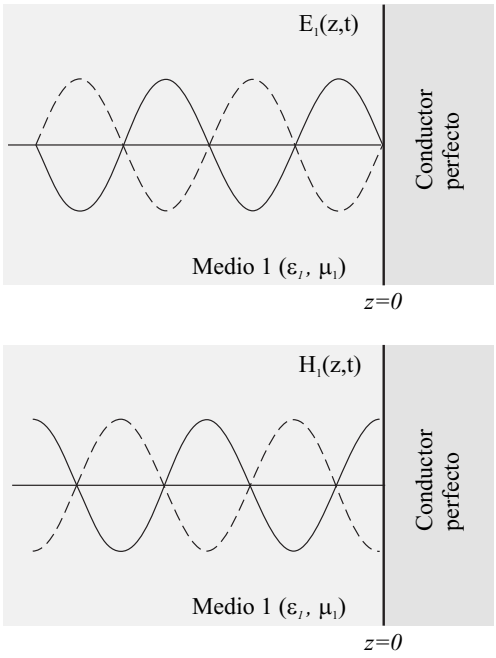



Figura 5.14. Ondas estacionaria en la superficie de un conductor

## 6.2. Incidencia normal sobre la superficie de un conductor perfecto

Consideremos el caso de una onda electromagnética que se propaga en un medio dieléctrico sin pérdidas e incide normalmente a la superficie de un conductor perfecto. En este caso, los coeficientes de reflexión y transmisión vienen dados por

las expresiones generales (5.57) y (5.58) pero ahora la impedancia intrínseca del medio 2 es compleja y viene dada por

$$Z_2 = (1+j)\frac{\alpha}{\gamma}$$

Si se trata de un conductor perfecto, $\gamma \to \infty$ y $Z_2 \to 0$, por tanto los coeficientes de reflexión y transmisión toman los siguientes valores

$$\Gamma = -1 \qquad \text{y} \qquad \tau = 0$$

Es decir, la onda electromagnética se refleja completamente, no hay onda transmitida al medio conductor.

Las expresiones que obtenemos para los campos en el medio 1 son

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{E}}_1(z) &= \mathbf{u}_x E_o^i \left(e^{-jk_1 z} - e^{+jk_1 z}\right) = -j2E_o^i \operatorname{sen}(k_1 z)\mathbf{u}_x \\
\widehat{\mathbf{H}}_1(z) &= \mathbf{u}_y H_o^i \left(e^{-jk_1 z} + e^{+jk_1 z}\right) = 2H_o^i \cos(k_1 z)\mathbf{u}_y
\end{aligned}$$

Los campos instantáneos correspondientes a estos fasores son

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1(z,t) &= \Re\left[\widehat{\mathbf{E}}_1(z)\, e^{j\omega t}\right] = 2E_o^i \operatorname{sen}(k_1 z) \operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{u}_x \\
\mathbf{H}_1(z,t) &= \Re\left[\widehat{\mathbf{H}}_1(z)\, e^{j\omega t}\right] = 2H_o^i \cos(k_1 z) \cos(\omega t)\mathbf{u}_x
\end{aligned} \tag{5.66}$$

que son ondas estacionarias en la región de $z < 0$. Como era de esperar, en $z = 0$ el campo eléctrico es nulo y el campo magnético alcanza su valor máximo. En la figura 5.14 se ha representaado el patrón de onda estacionaria para los campos $\mathbf{E}_1(z,t)$ y $\mathbf{H}_1(z,t)$.

**Ejercicio de autoevaluación 5.5**

Una onda plana de 50 MHz con amplitud de campo eléctrico de 100 V/m indice normalmente a través del aire en un medio dieléctrico semiinfinito con $\varepsilon_r = 16$. Determine: a) el coeficiente de reflexión y de transmisión; b) las densidades de potencia promedio de las ondas incidente, reflejada y transmitida; c) la distancia en el aire desde la frontera al mínimo más cercano de la intensidad de campo eléctrico.

**Solución**

a) Para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión hay que obtener primero las impedancias intrínsecas de los dos medios en juego:

$$Z_1 = Z_o = 120\pi \quad \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_r \varepsilon_o}} = \frac{Z_o}{4} = 30\pi \quad \Omega$$

Los coeficientes serán entonces

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -\frac{3}{5}$$

$$\tau = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2}{5}$$

Podemos comprobar que se verifica la relación $\tau = 1 + \Gamma$.

b) Densidades de potencia promedio de las ondas incidente, reflejada y transmitida. Estas densidades vienen dadas por las expresiones:

$$\langle \mathbf{S}_i \rangle = \frac{1}{2Z_1} \left| E_o^i \right|^2 \mathbf{u}_z = 13,26\mathbf{u}_z \text{ W/m}^2$$

$$\langle \mathbf{S}_r \rangle = \frac{1}{2Z_1} |\Gamma|^2 \left| E_o^i \right|^2 \mathbf{u}_z = 4,77\mathbf{u}_z \text{ W/m}^2$$

$$\langle \mathbf{S}_t \rangle = \frac{1}{2Z_2} |\tau|^2 \left| E_o^i \right|^2 \mathbf{u}_z = 8,49\mathbf{u}_z \text{ W/m}^2$$

Puede comprobarse que la energía incidente por unidad de tiempo y de superficie es igual a la energía reflejada más la transmitida también por unidad de tiempo y superficie.

c) Para calcular la distancia en el aire desde la frontera al mínimo más cercano, tenemos que obtener la expresión del campo eléctrico en el aire, que

será la suma del campo incidente y el reflejado. Puesto que $\Gamma = -3/5 = 3/5e^{j\pi}$, el campo en el aire será

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{u}_z E_o^i \left( e^{-jk_1 z} + \frac{3}{5} e^{j(k_1 z + \pi)} \right)$$

y la amplitud del campo eléctrico en el aire será

$$E_1^2 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* = \left(E_o^i\right)^2 \left( e^{-jk_1 z} + \frac{3}{5} e^{j(k_1 z + \pi)} \right) \left( e^{jk_1 z} + \frac{3}{5} e^{-j(k_1 z + \pi)} \right)$$

Operando

$$E_1 = \left|E_o^i\right| \sqrt{1 + \frac{9}{25} + \frac{6}{5} \cos\left(2k_1 z + \pi\right)}$$

que será mínimo cuando el coseno sea igual a $-1$, esto es

$$2k_1 z_{\text{mín}} + \pi = -(2m+1)\pi$$

con $m$ un número entero. Para $m = 1$ obtenemos

$$z_{\text{mín}} = -\frac{\pi}{k_1}$$

La constante de propagación cuando el medio es aire es

$$k_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\pi}{3} \text{ m}^{-1}$$

Luego

$$z_{\text{mín}} = -\frac{\pi}{k_1} = -3 \text{ m}$$

## 7. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS PLANAS: INCIDENCIA OBLICUA

En la sección anterior hemos analizado la indicendia normal de una onda plana en la superficie de separación de dos medios. En este caso el estado de polarización de la onda no repercute en los coeficientes de reflexión y de transmisión ya que los vectores de campo son siempre tangenciales a la frontera de separación de los medios. Sin embargo, cuando la incidencia no es normal sino oblicua hay que proceder con más cuidado. Consideremos una onda que incide oblicuamente

sobre la superficie de separación de dos medios como se muestra en la figura 5.15. Definimos el plano de incidencia como el plano que contiene la normal a la frontera y la dirección de la onda incidente. En la figura 5.15 el plano de incidencia coincide con el plano XZ. El ángulo de incidencia está contenido en el plano de incidencia y es el formado por la dirección de la onda incidente y la normal a la superficie de separación. De forma análoga se definen el ángulo de reflexión y el de transmisión.

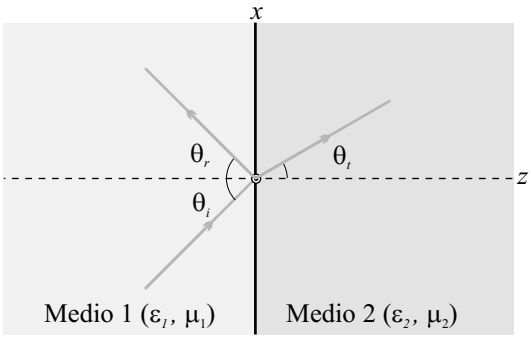



Figura 5.15. Incidencia oblicua de una onda en la superficie de separación de dos medios

Una onda genérica, con cualquier polarización siempre la podemos descomponer en suma de dos ondas polarizadas ortogonalmente, una con el vector campo eléctrico paralelo al plano de incidencia, llamada **polarización paralela**, y otra con el vector campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia, llamada **polarización perpendicular**. Estas dos configuraciones se muestran en la figura 5.16.

La polarización con el vector del campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia también se denomina polarización transvesal eléctrica y aquella en la que el vector de campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia se denomina también transversal magnética ya que en este caso, el vector del campo magnético es perpendicular al plano de incidencia.

Como hemos comentado, el estudio de la incidencia oblicua de una onda genérica sobre la superficie de separación de dos medios, lo podemos descomponer en el análisis de la incidencia de una onda con polarización perpendicular y otra con polarización paralela. Vamos a estudiar cada uno de estos casos.

## 7.1. Polarización perpendicular

En la figura 5.16(a) se esquematiza la situación de una onda plana que se propaga en la dirección indicada por el vector de propagación $\mathbf{k}_i$ e incide en la superficie de separación de dos medios con un ángulo $\theta_i$. El campo eléctrico tiene la dirección del eje Y (sale del papel) mientras que el campo magnético está contenido en el plano de incidencia. Los fasores para el campo eléctrico de las ondas

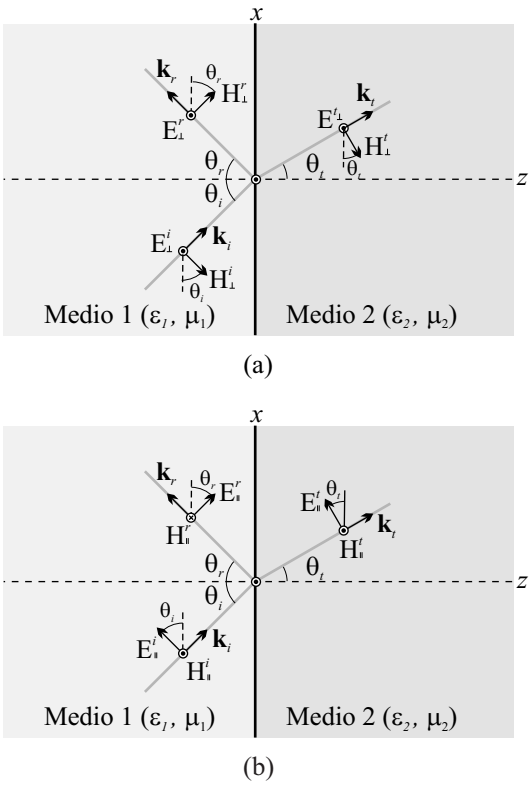



Figura 5.16. Incidencia oblicua con a) Polarización perpendicular; b) Polarización paralela

incidente, reflejada y transmitida vienen dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}^i_\perp &= \mathbf{u}_y E^i_{o,\perp}\, e^{-j\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}_i}\\ \widehat{\mathbf{E}}^r_\perp &= \mathbf{u}_y E^r_{o,\perp}\, e^{-j\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}_r}\\ \widehat{\mathbf{E}}^t_\perp &= \mathbf{u}_y E^t_{o,\perp}\, e^{-j\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r}_t}\end{aligned} \tag{5.67}$$

Las condiciones de contorno para el campo eléctrico en la superficie de separación de dos medios establecen que las componentes tangenciales de dicho campo son continuas, por tanto

$$E^i_{o,\perp}\, e^{-j\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}_i} + E^r_{o,\perp}\, e^{-j\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}_r} = E^t_{o,\perp}\, e^{-j\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r}_t}$$

Los vectores de onda incidente, reflejada y transmitida, así como los vectores de posición vienen dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_i &= k_1 \operatorname{sen}\theta_i \mathbf{u}_x + k_1 \cos\theta_i \mathbf{u}_z\\ \mathbf{k}_r &= k_1 \operatorname{sen}\theta_r \mathbf{u}_x - k_1 \cos\theta_r \mathbf{u}_z\\ \mathbf{k}_t &= k_2 \operatorname{sen}\theta_t \mathbf{u}_x + k_2 \cos\theta_t \mathbf{u}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i &= x\mathbf{u}_x + z\mathbf{u}_z\\ \mathbf{r}_r &= x\mathbf{u}_x - z\mathbf{u}_z\\ \mathbf{r}_t &= x\mathbf{u}_x + z\mathbf{u}_z\end{aligned}$$

de forma que los productos son

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}_i &= k_1(x\operatorname{sen}\theta_i + z\cos\theta_i)\\ \mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}_r &= k_1(x\operatorname{sen}\theta_r - z\cos\theta_r)\\ \mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}_t &= k_2(x\operatorname{sen}\theta_t + z\cos\theta_t)\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la condición de continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico para $z = 0$, obtenemos

$$E^i_{o,\perp}\, e^{-jk_1 x \operatorname{sen}\theta_i} + E^r_{o,\perp}\, e^{-jk_1 x \operatorname{sen}\theta_r} = E^t_{o,\perp}\, e^{-jk_2 x \operatorname{sen}\theta_t}$$

expresión que tiene que verificarse para cualquier valor de $x$. Esto sólo se cumple si las exponenciales son iguales, es decir

$$k_1 \operatorname{sen}\theta_i = k_1 \operatorname{sen}\theta_r = k_2 \operatorname{sen}\theta_t$$

De la primera igualdad se deduce que

$$\operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r \quad \rightarrow \quad \theta_i = \theta_r$$

que constituye la ley de reflexión de Snell. De la segunda igualdad, teniendo en cuenta que el número de onda $k = n\omega/c$ con $n$ el índice de refracción del medio, se deduce que

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_r$$

expresión que constituye la ley de refracción de Snell.

A continuación vamos a estudiar las relaciones entre las amplitudes de las diferentes ondas. Teniendo en cuenta los resultados de arriba, para el campo eléctrico se verifica la siguiente relación

$$E^i_{o,\perp} + E^r_{o,\perp} = E^t_{o,\perp} \tag{5.68}$$

Por otro lado, los fasores asociados al campo magnético de las ondas incidente, reflejada y transmitida en el punto $z = 0$ vienen dados por

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{H}}^i_\perp &= H^i_{o,\perp}\left(-\cos\theta_i \mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta_i \mathbf{u}_z\right) e^{-jk_1 x \operatorname{sen}\theta_i} \\
\widehat{\mathbf{H}}^r_\perp &= H^r_{o,\perp}\left(\cos\theta_i \mathbf{u}_x - \operatorname{sen}\theta_i \mathbf{u}_z\right) e^{-jk_1 x \operatorname{sen}\theta_i} \\
\widehat{\mathbf{H}}^t_\perp &= H^t_{o,\perp}\left(-\cos\theta_t \mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta_t \mathbf{u}_z\right) e^{-jk_2 x \operatorname{sen}\theta_t}
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Aplicando la continuidad de las componentes tangenciales del campo magnético (en ausencia de corrientes superficiales), en este caso las componentes según el eje X, y teniendo en cuenta las leyes de Snell deducidas anteriormente, tenemos

$$H^i_{o,\perp}\cos\theta_i - H^r_{o,\perp}\cos\theta_i = +H^t_{o,\perp}\cos\theta_t$$

Ahora bien, las amplitudes de los campos eléctrico y magnético están relacionadas por la impedancia intrínseca del medio, por tanto

$$\frac{E^i_{o,\perp}}{Z_1}\cos\theta_i - \frac{E^r_{o,\perp}}{Z_1}\cos\theta_i = +\frac{E^t_{o,\perp}}{Z_2}\cos\theta_t \tag{5.70}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (5.68) y (5.70) para las amplitudes reflejada y transmitida en función de la incidente, obtenemos

$$\Gamma_\perp = \frac{E^r_{o,\perp}}{E^i_{o,\perp}} = \frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t} \tag{5.71}$$

y

$$\tau_{\perp} = \frac{E^t_{o,\perp}}{E^i_{o,\perp}} = \frac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t} \tag{5.72}$$

que son respectivamente el coeficiente de reflexión y de trasmisión para el caso de incidencia oblicua con el vector campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia.

Podemos comprobar que se verifica la misma relación que en el caso de incidencia normal

$$\tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp}$$

y que lógicamente, si el ángulo de incidencia $\theta_i$ es nulo, estas expresiones se reducen a las obtenidas para la incidencia normal.

Para medios no magnéticos tenemos que

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{v_{ph,2}}{v_{ph,1}} = \frac{n_1}{n_2}$$

Y en virtud de la ley de la refracción

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t}$$

Entonces, los coeficientes de reflexión y de transmisión se pueden expresar mediante las siguientes expresiones

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_t - \theta_i)}{\operatorname{sen}(\theta_t + \theta_i)} \tag{5.73}$$

y

$$\tau_{\perp} = \frac{2\operatorname{sen}\theta_t \cos\theta_i}{\operatorname{sen}(\theta_t + \theta_i)} \tag{5.74}$$

## 7.2. Polarización paralela

Analicemos a continuación el caso esquematizado en la figura 5.16(b), en el que el campo eléctrico está contenido en el plano de incidencia. Procediendo de forma análoga al caso anterior y aplicando las leyes de Snell, la relación entre las amplitudes del campo magnético en la superficie de separación de los medios son

$$H^i_{o,\parallel} - H^r_{o,\parallel} = H^t_{o,\parallel}$$

que podemos escribir como

$$\frac{1}{Z_1}\left(E^i_{o,\parallel} - E^r_{o,\parallel}\right) = \frac{E^t_{o,\parallel}}{Z_2} \tag{5.75}$$

Por otro lado, los fasores asociados al campo eléctrico de las ondas incidente, reflejada y transmitida en el punto $z = 0$ vienen dados por

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{E}}^i_{\parallel} &= E^i_{o,\parallel}\left(\cos\theta_i \mathbf{u}_x - \operatorname{sen}\theta_i \mathbf{u}_z\right) e^{-jk_1 x \operatorname{sen}\theta_i} \\
\widehat{\mathbf{E}}^r_{\parallel} &= E^r_{o,\parallel}\left(\cos\theta_i \mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta_i \mathbf{u}_z\right) e^{-jk_1 x \operatorname{sen}\theta_i} \\
\widehat{\mathbf{E}}^t_{\parallel} &= E^t_{o,\parallel}\left(\cos\theta_t \mathbf{u}_x - \operatorname{sen}\theta_t \mathbf{u}_z\right) e^{-jk_2 x \operatorname{sen}\theta_t}
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Aplicando la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico, componentes según el eje X, y teniendo en cuenta de nuevo las leyes de Snell deducidas anteriormente, obtenemos

$$E^i_{o,\parallel}\cos\theta_i + E^r_{o,\parallel} cos\theta_i = E^t_{o,\parallel}\cos\theta_t \tag{5.77}$$

Resolviendo, como hemos hecho en el apartado anterior, el sistema formado por las ecuaciones (5.75) y (5.77) obtenemos

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E^r_{o,\parallel}}{E^i_{o,\parallel}} = \frac{Z_2\cos\theta_t - Z_1\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_t + Z_1\cos\theta_i} \tag{5.78}$$

y

$$\tau_{\parallel} = \frac{E^t_{o,\parallel}}{E^i_{o,\parallel}} = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_t + Z_1\cos\theta_i} \tag{5.79}$$

que son respectivamente, el coeficiente de reflexión y de trasmisión para el caso de incidencia oblicua con el vector campo eléctrico paralelo al plano de incidencia (contenido en el plano de incidencia).

En el caso de polarización paralela, la relación entre el coeficiente de transmisión y el de reflexión viene dada por

$$\tau_{\parallel} = \left(1 + \Gamma_{\parallel}\right)\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}$$

Para medios no magnéticos los coeficientes de reflexión y de transmisión se puede expresar como

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\tan\left(\theta_t - \theta_i\right)}{\tan\left(\theta_t + \theta_i\right)} \tag{5.80}$$

y

$$\tau_{\parallel} = \frac{2 \operatorname{sen}\theta_t \cos\theta_i}{\operatorname{sen}(\theta_t + \theta_i)\cos(\theta_t - \theta_i)} \tag{5.81}$$

## 7.3. Relaciones de fase. Ángulo de Brewster

A partir de las expresiones obtenidas para los coeficientes de reflexión y transmisión vamos a analizar las relaciones de fase entre las ondas incidente, reflejada y transmitida.

### *Onda transmitida*

Puesto que $\theta_i$ y $\theta_t$ están comprendidos entre 0 y $\pi/2$ de (5.74) y (5.81) se desprende que las amplitudes de los campos transmitidos tienen el mismo signo que las amplitudes de los campos incidentes. Por tanto, el campo transmitido está en fase con el campo incidente.

### *Onda reflejada*

Consideremos que $n_1 < n_2$. Entonces siempre se verificará que $\theta_i > \theta_t$. Vamos a analizar por separado los casos de polarización paralela y perpendicular

- Polarización paralela.
  - Si $\theta_i + \theta_t = \pi/2$, de la expresión del coeficiente reflexión

    $$\Gamma_{\parallel} = \frac{E^r_{o,\parallel}}{E^i_{o,\parallel}} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}$$

    vemos que $\tan(\theta_i + \theta_t) \to \infty$ y por tanto, $\Gamma_{\parallel} = 0$, es decir, no hay onda reflejada. El ángulo de incidencia para el cual sucede esto se denomina **ángulo de Brewster**, $\theta_B$. Se verifica que

    $$\theta_B + \theta_{t,B} = \pi/2 \quad ; \quad \cos\theta_B = \operatorname{sen}\theta_{t,B}$$

    por lo que

    $$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \qquad y \qquad \theta_B = \arctan\frac{n_2}{n_1}$$

- Si el ángulo de incidencia es menor que el ángulo de Brewster, $\theta_i + \theta_t < \pi/2$, entonces $\tan(\theta_t - \theta_i) < 0$ y $\tan(\theta_t + \theta_i) > 0$ lo cual significa que hay un cambio de fase de $\pi$ radianes entre la onda incidente y la reflejada.
- Finalmente si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de Brewster, $\theta_i > \theta_B$, entonces $\theta_i + \theta_t > \pi/2$ y tanto el numerador como el denominador de (5.80) son negativos, por lo que $\Gamma_{\parallel} > 0$, es decir, no hay cambio de fase.

- Polarización perpendicular. De la expresión para el coeficiente reflexión

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E^r_{o,\perp}}{E^i_{o,\perp}} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_t - \theta_i)}{\operatorname{sen}(\theta_t + \theta_i)}$$

se desprende que siempre hay un cambio de fase de $\pi$ radianes entre la onda incidente y la reflejada.

Consideremos ahora dos casos límite: incidencia normal e incidencia rasante. Para incidencia normal ($\theta_i \to 0$) podemos aproximar las tangentes y los senos por sus argumentos y entonces tendremos

$$\frac{E^r_{o,\perp}}{E^i_{o,\perp}} = \frac{E^r_{o,\parallel}}{E^i_{o,\parallel}} = \frac{\theta_t - \theta_i}{\theta_t + \theta_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Para el caso de incidencia rasante ($\theta_i \to \pi/2$) tenemos

$$\frac{E^r_{o,\parallel}}{E^i_{o,\parallel}} = 1 \qquad ; \qquad \frac{E^r_{o,\perp}}{E^i_{o,\perp}} = -1$$

Estos resultados se resumen en la figura 5.17.

Para el caso en que $n_1 > n_2$ se verificará que $\theta_t > \theta_i$. El ángulo de incidencia para el cual el ángulo de refracción es igual a $\theta_t = \pi/2$, se denomina **ángulo crítico**. En este caso la onda transmitida fluye a lo largo de la superficie de separación de los dos medios y no se transmite energía al medio 2. El ángulo crítico se deriva de la ley de la refracción y viene dado por

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \operatorname{sen}\theta_t|_{\theta_t = \pi/2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{5.82}$$

Si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico, la onda incidente se refleja en su totalidad. No hay onda transmitida. Este fenómeno se conoce como **reflexión interna total** .

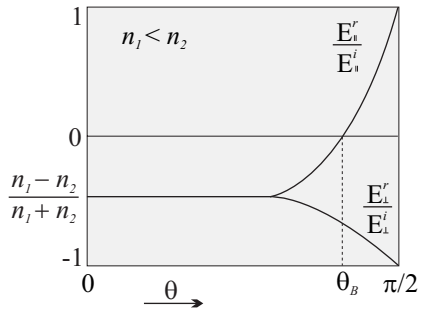



Figura 5.17. Ángulo de Brewster y relaciones de fase entre las componentes reflejada e incidente para los dos tipos de polarización. Caso $n_1 < n_2$

Si hacemos un análisis para las relaciones de fases entre las componentes reflejada, transmitida e incidente similar al hecho más arriba obtendríamos los resultados que se representan en la figura 5.18.

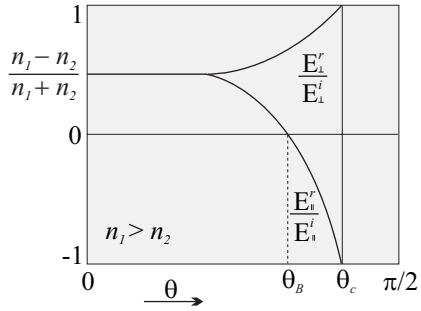



Figura 5.18. Ángulo de Brewster y relaciones de fase entre las componentes reflejada e incidente para los dos tipos de polarización. Caso $n_1 > n_2$

## 7.4. Reflectividad y transmisividad

Los coeficientes de reflexion y transmisión representan las relaciones entre las amplitudes del campo eléctrico reflejado y transmitido con el campo eléctrico incidente. Pero nos interesa estudiar las relaciones entre las potencias promedio

reflejada y transmitida con la potencia promedio incidente.

Consideremos el caso de polarización perpendicular. El vector de Poynting promedio asociado a cada una de las ondas viene dado por las siguientes expresiones

$$< \mathbf{S}_{\perp}^{i} >= \frac{\left|E_{o,\perp}^{i}\right|^{2}}{2Z_1}\mathbf{u}_i$$

$$< \mathbf{S}_{\perp}^{r} >= \frac{\left|E_{o,\perp}^{r}\right|^{2}}{2Z_1}\mathbf{u}_r$$

y

$$< \mathbf{S}_{\perp}^{t} >= \frac{\left|E_{o,\perp}^{t}\right|^{2}}{2Z_2}\mathbf{u}_t$$

donde $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_t$ son respectivamente los vectores unitarios que indican la dirección de propagación de las ondas incidente, reflejada y transmitida. La potencia promedio a través de un área $\mathbf{A} = A\mathbf{u}_z$ definida en la superficie de separación de los medios vendrá dada por

$$< P_{\perp}^{i} >= \int < \mathbf{S}_{\perp}^{i} > \cdot d\mathbf{A} =< S_{\perp}^{i} > A\cos\theta_i = \frac{\left|E_{o,\perp}^{i}\right|^{2}}{2Z_1}A\cos\theta_i$$

$$< P_{\perp}^{r} >= \int < \mathbf{S}_{\perp}^{r} > \cdot d\mathbf{A} =< S_{\perp}^{r} > A\cos\theta_r = \frac{\left|E_{o,\perp}^{r}\right|^{2}}{2Z_1}A\cos\theta_r$$

y

$$< P_{\perp}^{t} >= \int < \mathbf{S}_{\perp}^{t} > \cdot d\mathbf{A} =< S_{\perp}^{t} > A\cos\theta_t = \frac{\left|E_{o,\perp}^{t}\right|^{2}}{2Z_2}A\cos\theta_t$$

Una vez obtenidas las expresiones para las potencias promedio, definimos la **reflectividad** $R$ como el cociente entre la potencia reflejada y la potencia incidente, esto es

$$R_{\perp} = \frac{< P_{\perp}^{r} >}{< P_{\perp}^{i} >} = \left|\frac{E_{o,\perp}^{r}}{E_{o,\perp}^{i}}\right|^{2} \tag{5.83}$$

Puesto que la razón entre las amplitudes del campo eléctrico reflejado e incidente es precisamente el coeficiente de reflexión, tenemos

$$R_{\perp} = |\Gamma_{\perp}|^{2}$$

Y en el caso de polarización paralela, tendríamos

$$R_{\parallel} = \frac{< P_{\parallel}^{r} >}{< P_{\parallel}^{i} >} = \left|\Gamma_{\parallel}\right|^{2} \tag{5.84}$$

Análogamente se define la **transmitividad** $T$ como la razón entre la potencia transmitida y la potencia incidente

$$T_{\perp} = \frac{< P_{\perp}^{t} >}{< P_{\perp}^{i} >} = \frac{|E_{o,\perp}^{r}|^{2} Z_1 \cos\theta_t}{|E_{o,\perp}^{i}|^{2} Z_2 \cos\theta_i}$$

o lo que es lo mismo

$$T_{\perp} = \frac{< P_{\perp}^{t} >}{< P_{\perp}^{i} >} = |\tau_{\perp}|^{2} \left(\frac{Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i}\right) \tag{5.85}$$

y para polarización paralela

$$T_{\parallel} = \frac{< P_{\parallel}^{t} >}{< P_{\parallel}^{i} >} = \left|\tau_{\parallel}\right|^{2} \left(\frac{Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i}\right) \tag{5.86}$$

La conservación de la energía requiere que se verifique que la potencia incidente debe ser igual a la suma de la potencia reflejada más la potencia transmitida, esto es

$$< P^{i} >=< P^{r} > + < P^{t} >$$

Teniendo en cuenta las expresiones para la potencia promedio tanto en el caso de polarización perpendicular como paralela, obtenemos

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1$$

y

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$$

Ambas expresiones son una consecuencia del principio de conservación de la energía.

**Ejercicio de autoevaluación 5.6**

Un haz de luz de 10 W con sección transversal circular viaja a través del aire e incide en la superficie plana de un dieléctrico con un ángulo de incidencia de $60^{o}$. El dieléctrico es no magnético y su permitividad eléctrica es $\varepsilon = 9\varepsilon_o$.

Si la onda tiene polarización paralela, determine el ángulo de transmisión y la potencia promedio reflejada y transmitida.

**Solución**

El índice de refracción del medio dieléctrico viene dado por

$$n_2 = \frac{c}{v_{ph,2}}$$

con

$$v_{ph,2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}} = \frac{c}{3}$$

O sea, $n_2 = 3$. De acuerdo con la ley de Snell de la refracción

$$\operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_i = \frac{\operatorname{sen} 60^o}{3} = 0{,}29$$

O bien

$$\theta_t = 16{,}78^o$$

El coeficiente de reflexión para polarización paralela viene dados por (5.80) ya que el medio es no magnético

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} = \frac{\tan(-43{,}22^o)}{\tan(76{,}78^o)} = -0{,}22$$

La potencia reflejada será

$$< P^r_{\parallel} >=< P^i_{\parallel} > \left|\Gamma_{\parallel}\right|^2 = 0{,}48 \text{ W}$$

Y la potencia transmitida será

$$< P^t_{\parallel} >=< P^i_{\parallel} > - < P^r_{\parallel} >= 9{,}52 \text{ W}$$

## 8. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 5.1** Una onda electromagnética plana polarizada linealmente se propaga en la dirección $z > 0$. El campo eléctrico es de la forma

$$\mathbf{E}(z,t) = E(z,t)\mathbf{u}_x$$

Las constantes del medio son: $\varepsilon = 16\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$ y $\gamma = 0$. La onda es sinusoidal y su frecuencia es $f = 10^8$ Hz. En el instante $t = (1/12)10^{-8}$ s. se observa que existe un máximo de $10\,\mathrm{V/m}$ en $z = 0,25$ m. Obtener las expresiones instantáneas para el campo eléctrico y el magnético.

**E 5.2** Una onda electromagnética plana, polarizada linealmente, se propaga en el vacío en la dirección del eje Y, hacia $y > 0$. Disponemos un dipolo rectangular de lados $a$ y $b$, $(b = 2a)$, situado como indica la figura E5.2. El campo eléctrico de la onda viene dado por,

$$\mathbf{E} = E_o \cos(\omega t - ky)\mathbf{u}_z$$

Calcular la f.e.m. inducida en el dipolo para los tres casos siguientes: a) $\lambda >> a$; b) $\lambda = 2a$; c) $\lambda = 4a$.

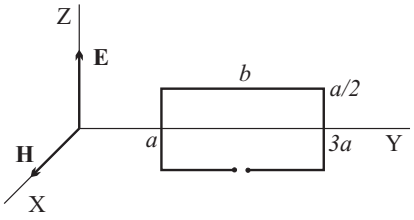



Figura E5.2

**E 5.3** En el espacio existe un campo magnético dado por la ecuación

$$\mathbf{B} = B_o \operatorname{sen}(2\pi y/L) \operatorname{sen}\omega t\, \mathbf{u}_z$$

Sobre el plano XY y a una distancia $L$ del origen se sitúa una espira abierta de lado $L/2$, como indica la figura E5.3. Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

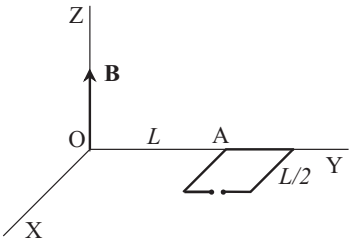



Figura E5.3

**E 5.4** Una onda electromagnética se propaga en el vacío en la dirección del eje Y, de forma que la intensidad de campo magnético es:

$$\mathbf{H} = H_o \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda})\,\mathbf{u}_z$$

La frecuencia de la onda es $f = 10^8$ Hz, siendo $T$ el periodo y $\lambda$ la longitud de onda. Un dipolo en forma de espira cuadrada, de lado $L = (3/2)\lambda$, se dispone a una distancia del origen $\lambda$ como muestra la figura E5.4. Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

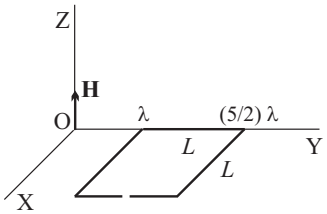



Figura E5.4

**E 5.5** En un medio de permeabilidad $\mu_o$ y permitividad $\varepsilon = 4\varepsilon_o$ se propaga una onda electromagnética, cuyo campo eléctrico es de la forma:

$$\mathbf{E} = 10^{-2}\,\cos(10^8\,\pi\,t - k\,y + \pi/2)\,\mathbf{u}_z \text{ V/m}$$

Calcular la constante $k$, la longitud de onda $\lambda$ y la intensidad de campo magnético $\mathbf{H}$. Encontrar el primer punto sobre el eje Y, distinto del origen de coordenadas, donde se anula $\mathbf{H}$, para $t = 10^{-6}$ s.

**E 5.6** En un medio de permeabilidad $\mu_o$ y permitividad $\varepsilon = 9\varepsilon_o$ se propaga una onda electromagnética, cuya intensidad de campo magnético es:

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_z 10^{-2}\cos(10^8\pi t - ky + \pi/2)$$

Calcular las constantes $k$ y $\lambda$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$. Encontrar el primer punto sobre el eje Y, distinto del origen de coordenadas, donde se anula el campo eléctrico $\mathbf{E}$ para $t = 5 \times 10^{-7}$s.

**E 5.7** Una onda electromagnética plana de frecuencia $10^8$Hz se propaga en la direccion del eje Z en el seno de un dieléctrico perfecto. El fasor asociado al campo eléctrico viene dado por

$$\widehat{\mathbf{E}} = 10e^{-6z}\mathbf{u}_x$$

Calcular la longitud de onda $\lambda$, la permitividad $\varepsilon$, el fasor asociado al campo magnético $\widehat{\mathbf{H}}$ y el vector de Poynting $\widehat{\mathbf{S}}$.

**E 5.8** El campo eléctrico de una onda electromagnética polarizada linealmente en forma compleja es:

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{u}_x E_o e^{-jkz} + \mathbf{u}_x 2E_o e^{-j(kz-\varphi)}$$

Calcular la intensidad de campo magnético $\widehat{\mathbf{H}}$. Calcular el vector de Poynting $\widehat{\mathbf{S}}$ y su valor medio $< \mathbf{S} >$.

**E 5.9** El campo eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en el vacío viene dado por

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{u}_x E_o e^{-jkz} + \mathbf{u}_y 2E_o e^{-j(kz-\varphi)}$$

Indicar el tipo de polarización de la onda. Calcular la intensidad de campo magnético $\widehat{\mathbf{H}}$ y determinar el vector de Poynting $\widehat{\mathbf{S}}$ y su valor medio $\langle \mathbf{S} \rangle$.

**E 5.10** A frecuencias muy altas la corriente se limita a una región próxima a la superficie del conductor y los campos eléctrico y magnético son nulos en el interior. Si $E_x$ y $B_y$ son las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético representadas en la figura E5.10. Demostrar que en el conductor se cumple la siguiente relación:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

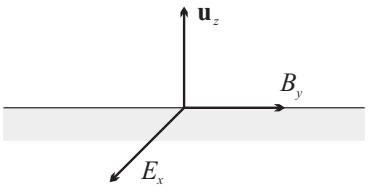



Figura E5.10

**E 5.11** Una onda electromagnética plana de 100 MHz se propaga en la dirección del eje Z. Mediante una sonda determinamos el máximo del campo eléctrico en un punto, considerado como referencia, y su valor es $E_o = 10$ V/m. Con la misma sonda medimos el valor máximo del campo en un punto sobre el eje Z distante del anterior 3 m resultando un valor de 0,01V/m. La permitividad del medio es $\varepsilon_o$ y su permeabilidad $\mu_o$.

De los datos obtenidos, ¿se puede deducir que la onda se propaga en un medio conductor? En caso afirmativo calcular la constante de atenuación y la conductividad del medio.

**E 5.12** Una onda electromagnética polarizada linealmente en la dirección $\mathbf{u}_x$, se propaga en la dirección positiva del eje Z. Su amplitud es 10 V/m, la frecuencia $f = 300$ MHz. Las constantes del medio son $\varepsilon = 4\varepsilon_o$, $\mu = \mu_o$ y $\gamma = 100$ $(\Omega\text{m})^{-1}$. Determinar las constantes de atenuación y fase ($\alpha$ y $\beta$), la impedancia intrínseca y la profundidad de penetración.

**E 5.13** Una onda plana circularmente polarizada a izquierdas con módulo de campo eléctrico de 4V/m, viaja en la dirección del eje X en un medio no magnético y sin pérdidas. La frecuencia de la onda es de 1000 MHz y la velocidad de fase $v_{ph} = c/3$. Suponga que para $x = 0$; $t = 0$ el campo eléctrico sólo tiene componente en la dirección del eje Y. Determine: *a*) Las expresiones para el campo eléctrico y el campo magnético; *b*) La impedancia característica del medio; y *c*) La expresión para el vector de Poynting en el plano $x = 2$ cm.

**E 5.14** El campo eléctrico de una onda plana que se propaga en un medio no magnético es

$$\mathbf{E} = 25\, e^{-17x} \cos(2\pi \cdot 10^{10} t - 400x)\mathbf{u}_z$$

Determine: *a*) El tipo de medio de que se trata (dieléctrico, conductor, dieléctrico con pequeñas pérdidas...); *b*) La impedancia intrínseca del medio; y *c*) La expresión correspondiente al campo magnético **H**

**E 5.15** Una onda plana uniforme de 30GHz y con una amplitud de 100 kV/m incide sobre una placa de aluminio ($\gamma = 3{,}53 \cdot 10^7$ S/m) que es perpendicular a la dirección de propagación. La mayor parte de la potencia es reflejada, pero un poco se propaga hacia la placa de aluminio. Determine la amplitud de la onda transmitida y la distancia que recorrerá en la placa de aluminio antes de que el 90 % de su potencia se disipe.

**E 5.16** Dos ondas planas uniformes se propagan en la misma región del espacio libre y los fasores del campo eléctrico son

$$\widehat{\mathbf{E}}_1^+ = 120 e^{-j4\pi z}\mathbf{u}_x$$

y

$$\widehat{\mathbf{E}}_2^- = 30e^{j4\pi z}\mathbf{u}_x$$

Determine: *a*) la frecuencia de las ondas; *b*) La impedancia intrínsica de la región $z > 0$ que ha causado la reflexión de la onda; y *c*) El valor o valores de $z$ en el intervalo $[-0{,}5; 0]$ en que es máxima la amplitud del campo eléctrico.

**E 5.17** Una onda plana uniforme en la región 1 del espacio incide sobre la frontera plana que separa las regiones 1 y 2. Si ambas regiones son dieléctricos sin pérdidas y no magnéticos, determine la razón $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ si el 10 % de la energía de la onda incidente es: *a*) reflejada; y *b*) transmitida a la región 2.

Tema 6

# PROPAGACIÓN GUIADA. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

## RESUMEN

### Objetivos generales

Estudiar las características de la propagación guiada de ondas electromagnéticas y los distintos sistemas de transmisión con simetría translacional. Particularizar este estudio en las líneas de transmisión y en la propagación de ondas transvesales electromagnéticas, ondas TEM.

### Objetivos específicos

- Relaciones generales entre los campos eléctrico y magnético en sistemas de transmisión con simetría traslacional
- Modos de transmisión. Modo transversal electromagnético
- Línea de transmisión: Concepto y ecuaciones de la línea.
- Propagación de ondas en una línea de transmisión: Impedancia de una línea. Coeficiente de reflexión. Líneas sin pérdidas.
- Caracterización de una onda estacionaria en una línea de transmisión.
- Potencia transmitida en una línea sin pérdidas.
- La carta de Smith. Aplicaciones.
- Adaptación de impedancias mediante sintonizadores simples y dobles.
- Tratamiento de las líneas sin pérdidas.

## Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial. Notación fasorial.

## INTRODUCCIÓN

Hasta aquí hemos estudiado la propagación de ondas electromagnéticas en medios ilimitados. El objetivo de este tema y los siguientes es el estudio de la propagación del campo electromagnético en medios confinados. En general, estos medios confinados son estructuras que se utilizan para transferir energía o información entre dos puntos y se denominan de forma genérica **líneas de transmisión**. Ejemplos de líneas de transmisión son los cables telefónicos, el cable coaxial que transporta señal de audio, el cable de antena de TV, las fibras ópticas y las guías de ondas. En la figura 6.1 se muestran algunos de los ejemplos de líneas de transmisión mencionados.

Todas estas líneas de transmisión se caracterizan porque existe una dirección privilegiada, que normalmente identificamos con la dirección del eje Z. Esta dirección coincide con la dirección de propagación de la onda electromagnética y a lo largo de la misma se conserva la sección transversal del sistema, tanto en geometría como en lo referente a las características electromagnéticas de los medios que forman parte de la línea. Por este motivo también se denominan sistemas de transmisión cilíndricos o sistemas de transmisión con simetría traslacional. Esta hipótesis de simetría traslacional nos va a permitir resolver con relativa sencillez el problema de propagación.

De los sistemas mostrados en la figura 6.1, la línea bifilar y la línea microstrip son sistemas abiertos y la falta de confinamiento del campo electromagnético puede dar lugar a fenómenos de radiación que inhabilitan el sistema para su utilización a muy alta frecuencia. Aunque en sentido estricto todo dispositivo utilizado para la transmisión de energía electromagnética es una línea de transmisión, lo común es reservar este término para los que pueden transmitir ondas transversales electromagnéticas (TEM) que, como veremos más adelante, son aquellos que constan de dos o más conductores. El término **guía de ondas** se reserva para los sistemas que son capaces de transmitir una onda que no tiene componente eléctrica en la dirección de propagación, onda transversal eléctrica (TE), o bien que no tiene componente magnética, onda transversal magnética (TM). Las guías están formadas por un solo conductor hueco cuyo interior puede estar ocupado por un dieléctrico o por aire. La fibra óptica está constituida por una varilla dieléctrica en la que la luz está confinada a viajar mediante reflexiones internas totales.

La elección del sistema de propagación viene determinada en cada caso por consideraciones tales como son el modo de propagación, atenuación, rango de frecuencias, capacidad de transmisión de potencia, coste de producción, etc.

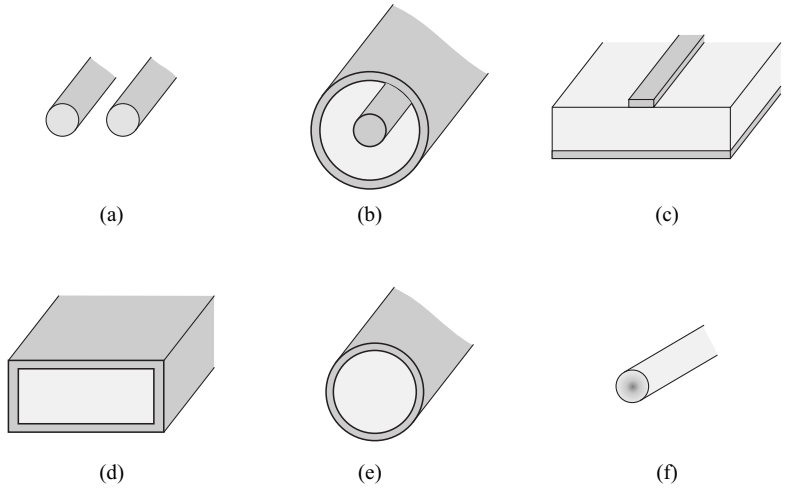



Figura 6.1. Líneas de transmisión: a) línea bifilar; b) cable coaxial; c) linea microstrip; d) guía de ondas rectangular; d) guía de ondas cilíndrica y f) fibra óptica

## 1. RELACIONES GENERALES ENTRE E Y H

El propósito de esta sección es deducir expresiones generales para los campos eléctrico y magnético que se propagan a lo largo de un sistema de transmisión cilíndrico. Partimos de señales armónicas por lo que la dependencia temporal será de la forma $e^{j\omega t}$, siendo $f = \omega/2\pi$ la frecuencia de alimentación. Nos limitamos a medios lineales, homogéneos e isótropos en los que no existen fuentes. En estas condiciones las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}} = 0$$

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\widehat{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\widehat{\mathbf{E}}$$

con $\varepsilon$ la permitividad eléctrica compleja y $\mu$ la permeabilidad magnética de los materiales en que se efectúa la propagación.

Además, la existencia de las superficies conductoras que constituyen el sistema de transmisión exije que los campos verifiquen las siguientes condiciones de contorno:

- El campo eléctrico debe ser normal a las superficies metálicas.

$$\mathbf{u}_n \times \widehat{\mathbf{E}} = 0$$

  con $\mathbf{u}_n$ el vector unitario a la superficie metálica considerada

- El campo magnético debe ser tangencial a dichas superficies, esto es

$$\mathbf{u}_n \cdot \widehat{\mathbf{H}} = 0$$

Para abordar el problema de propagación planteado y dado que hemos considerado como eje de simetría del sistema de transmisión y como dirección de propagación el eje Z, podemos descomponer los vectores del campo y el operador $\nabla$ en sus componentes transversal y longitudinal

$$\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{E}}_t + \widehat{\mathbf{E}}_z = \widehat{\mathbf{E}}_t + \widehat{E}_z \mathbf{u}_z$$

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

Teniendo en cuenta esta descomposición, las ecuaciones de Maxwell quedan

$$\begin{aligned} \nabla_t \cdot \widehat{\mathbf{E}}_t + \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial z} &= 0 \\ \nabla_t \cdot \widehat{\mathbf{H}}_t + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \widehat{\mathbf{E}}_t - \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{E}_z + \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}_t}{\partial z} &= -j\omega\mu \left( \widehat{\mathbf{H}}_t + \widehat{H}_z \mathbf{u}_z \right) \\ \nabla_t \times \widehat{\mathbf{H}}_t - \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{H}_z + \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{H}}_t}{\partial z} &= j\omega\varepsilon \left( \widehat{\mathbf{E}}_t + \widehat{E}_z \mathbf{u}_n \right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

donde hemos sustituído $\nabla_t \times \mathbf{u}_z$ por $(-\mathbf{u}_z \times \nabla_t)$.

Las dos últimas expresiones que son las ecuaciones rotacionales de Maxwell se pueden separar directamente obteniendo los siguientes conjuntos de ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \widehat{\mathbf{H}}_t &= j\omega\varepsilon \widehat{E}_z \mathbf{u}_z \\ \nabla_t \times \widehat{\mathbf{E}}_t &= -j\omega\mu \widehat{H}_z \mathbf{u}_z \end{aligned} \tag{6.3}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{H}_z - \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{H}}_t}{\partial z} &= -j\omega\varepsilon \widehat{\mathbf{E}}_t \\ \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{E}_z - \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}_t}{\partial z} &= j\omega\mu \widehat{\mathbf{H}}_t \end{aligned} \tag{6.4}$$

Operando adecuadamente en las dos últimas expresiones, es posible eliminar $\widehat{\mathbf{E}}_t$ o $\widehat{\mathbf{H}}_t$ y obtener las componentes transversales en términos de las longitudinales. Así, si operamos en la primera con $\mathbf{u}_z \times \partial/\partial z$ y multiplicamos la segunda por $j\omega\varepsilon$ obtenemos

$$\begin{aligned} j\omega\varepsilon \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{E}_z - j\omega\varepsilon \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}_t}{\partial z} &= -\omega^2 \mu\varepsilon \widehat{\mathbf{H}}_t \\ -\frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \widehat{H}_z + \frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{H}}_t}{\partial z^2} &= -j\omega\varepsilon \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}_t}{\partial z} \end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones,

$$-\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \widehat{\mathbf{H}}_t = j\omega\varepsilon \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{E}_z - \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \widehat{H}_z \tag{6.5}$$

donde $k = \omega^2 \mu\varepsilon$ es el número de onda o constante de propagación que tendría la onda en el medio libre.

Si realizamos operaciones similares y eliminamos $\widehat{\mathbf{H}}_t$ en las relaciones (6.4), obtenemos la siguiente expresión para $\widehat{\mathbf{E}}_t$ en términos de $\widehat{E}_z$ y $\widehat{H}_z$ :

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \widehat{\mathbf{E}}_t = j\omega\mu \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{H}_z - \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \widehat{E}_z \tag{6.6}$$

Estas expresiones nos permiten deducir los campos transversales si conocemos las componentes longitudinales de los mismos. Además, a partir de ellas podemos obtener una ecuación de ondas para $\widehat{E}_z$ y $\widehat{H}_z$ respectivamente. Para esto, aplicamos el operador $\nabla_t \times$ a las ecuaciones (6.5) y (6.6) y teniendo en cuenta las expresiones (6.3), tenemos finalmente

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\widehat{E}_z = 0 \tag{6.7}$$

para $\widehat{E}_z$, y

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\widehat{H}_z = 0 \tag{6.8}$$

para $\widehat{H}_z$

Estas ecuaciones, junto con (6.5) y (6.6) son el punto de partida para resolver la distribución del campo electromagnético en estructuras cilíndricas. Conviene destacar que su obtención no depende del carácter de los parámetros escalares $\varepsilon$ y $\mu$, que pueden ser complejos.

A continuación aplicamos el método de separación de variables a la ecuación (6.7). Consideremos que la componente $z$ del campo eléctrico es de la forma

$$\widehat{E}_z(x, y, z) = \widehat{e}_z(x, y)\widehat{Z}(z)$$

Entonces, para la función que lleva la dependencia en $z$, tenemos

$$\frac{1}{\widehat{Z}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\widehat{Z} = -\kappa^2$$

cuyas soluciones son del tipo

$$\widehat{Z} = e^{\pm j\kappa z}$$

de esta forma, la componente $\widehat{E}_z$ del campo eléctrico viene dada por

$$\widehat{E}_z(x, y, z) = \widehat{e}_z(x, y)e^{\pm j\kappa z}$$

donde $\kappa$ es la constante de propagación en la línea.

Si añadimos la dependencia temporal, vemos que la componente $z$ del campo eléctrico, independientemente de su dependencia con las coordenadas transversales, variará según

$$\begin{aligned} E_z(x,y,z,t) &= \Re\left\{\widehat{E}_z e^{j\omega t}\right\} \\ &= \Re\left\{\widehat{e}_z(x,y)e^{j(\omega t \mp \kappa z)}\right\} \end{aligned}$$

donde el signo menos corresponde a una onda que se propaga según las z crecientes y el signo más a una onda que se propaga según las z decrecientes. La constante de propagación será, en general, compleja:

$$\kappa = \beta - j\alpha$$

siendo $\beta$ la constante de fase y $\alpha$ la constante de atenuación. En los sistemas de transmisión ideales, sin pérdidas, la constante de atenuación será nula y, por tanto, la constante de propagación es real. En adelante, mientras no especifiquemos lo contrario, consideramos líneas sin pérdidas, es decir, $\kappa = \beta$.

Sin pérdida de generalidad, en adelante consideraremos únicamente las soluciones correspondientes a las ondas progresivas en la dirección de las $z$ crecientes. Una vez determinada la dependencia con $z$ para la componente longitudinal del campo, la ecuación de ondas (6.7) se reduce a forma

$$\left[\nabla_t^2 + \left(k^2 - \beta^2\right)\right]\widehat{e}_z(x,y) = 0 \tag{6.9}$$

Los mismos razonamientos aplicados a la componente $z$ del campo magnético suministran la siguiente ecuación de ondas para dicho campo

$$\left[\nabla_t^2 + \left(k^2 - \beta^2\right)\right]\widehat{h}_z(x,y) = 0 \tag{6.10}$$

Con la resolución de estas ecuaciones, teniendo en cuenta las condiciones de contorno del problema, tendremos totalmente resuelto el problema de propagación en la línea de transmisión ya que las componentes transversales vienen dadas en función de las longitudinales. En efecto, si consideramos la solución de onda propagante según las $z$ crecientes y teniendo en cuenta la dependencia de $\widehat{E}_z$ con $z$, el efecto de $\partial/\partial z$ es equivalente a multiplicar por el factor $-j\beta$ y las ecuaciones (6.6) y (6.5) se transforman en

$$\widehat{\mathbf{E}}_t = \frac{1}{k^2 - \beta^2}\left(j\omega\mu\mathbf{u}_z \times \nabla_t\widehat{H}_z - j\beta\nabla_t\widehat{E}_z\right) \tag{6.11}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_t = \frac{1}{k^2 - \beta^2}\left(-j\omega\varepsilon \mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{E}_z - j\beta \nabla_t \widehat{H}_z\right) \tag{6.12}$$

## 2. MODOS DE TRANSMISIÓN. MODO TEM

En el tema anterior vimos que las soluciones naturales de la ecuación de ondas homogénea para el campo electromagnético en un medio isótropo e indefinido, es decir, en ausencia de contornos, son las ondas planas. También hemos comentado que cualquier señal electromagnética puede expresarse en términos de suma de ondas planas mediante el adecuado desarrollo de Fourier. Por tanto, en principio podríamos resolver la propagación del campo electromagnético en sistemas de transmisión cilíndricos mediante superposición de ondas planas. Sin embargo, en la práctica, resulta bastante difícil y engorroso. Un procedimiento más sencillo consiste en encontrar distribuciones específicas del campo electromagnético que constituyan soluciones naturales a nuestro problema. Dichas distribuciones, a las que denominaremos modos, resultan ser básicamente de tres tipos:

**Modo Transversal Electromagnético (TEM)** cararacterizado porque tanto la componente longitudinal del campo eléctrico como la del campo magnético son nulas, $E_z = H_z = 0$.

**Modo Transversal Eléctrico (TE)** caracterizado porque la componente longitudinal del campo eléctrico es nula, $E_z = 0$.

**Modo Transversal Magnético (TM)** caracterizado porque la componente longitudinal del campo magnético es nula, $H_z = 0$.

El modo TEM posee una especial importancia por diferentes razones prácticas y conceptuales. Por un lado constituye el modo principal de propagación en líneas de transmisión formadas por dos conductores a cuyo estudio dedicaremos el resto del tema y, por otro lado, no puede propagarse en estructuras monoconductoras como la guía de ondas, tal como veremos a continuación.

Particularizando las ecuaciones (6.4) para un modo TEM, definido por la ausencia de componentes del campo longitudinales ($E_z = 0; H_z = 0$), obtenemos

$$\mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{H}}_t}{\partial z} = -j\omega\varepsilon \widehat{\mathbf{E}}_t$$

$$-\mathbf{u}_z \times \frac{\partial \widehat{\mathbf{E}}_t}{\partial z} = j\omega\mu \widehat{\mathbf{H}}_t$$

que podemos desacoplar obteniendo una ecuación de ondas para $\widehat{\mathbf{E}}_t$ y $\widehat{\mathbf{H}}_t$

$$\frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{E}}_t}{\partial z^2} + k^2 \widehat{\mathbf{E}}_t = 0$$

Es decir, en este caso se verifica la igualdad

$$\beta^2 = k^2$$

esto es, un modo TEM en un sistema de transmisión longitudinal posee la misma constante de propagación que tendría la onda en un medio ilimitado con las mismas características eléctromagnéticas.

Además, el hecho de que no existan componentes longitudinales del campo electromagnético conduce, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.1) y (6.3) a las siguientes expresiones para $\widehat{\mathbf{E}}_t$

$$\nabla_t \cdot \widehat{\mathbf{E}}_t = 0$$

$$\nabla_t \times \widehat{\mathbf{E}}_t = 0$$

y similares para $\widehat{\mathbf{H}}_t$

Así pues, el problema de resolución de la distribución transversal del campo electromagnético de una onda TEM queda reducido a un problema estático en dos dimensiones.

A continuación vamos a comprobar que si imponemos las condiciones de contorno homogéneas en las paredes de una guía hueca, como puede ser la representada en la figura 6.2, la única solución posible de tipo estático es la que corresponde a un campo idénticamente nulo en el interior. Efectivamente, puesto que $\widehat{\mathbf{E}}_t$ es irrotacional, podemos expresarlo como el gradiente de una función potencial

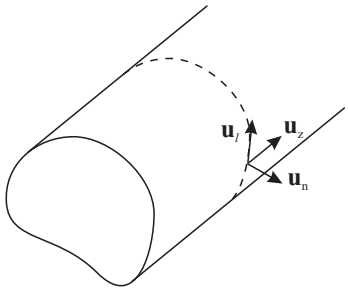



Figura 6.2. Línea de transmisión genérica

$$\mathbf{E}_t = -\nabla_t \phi$$

y aplicando la ecuación homogénea de Maxwell tendremos que

$$\nabla_t^2 \phi = 0$$

Si imponemos que $\phi$ sea constante en el contorno entonce $\phi$ debe ser uniforme en el interior de la guía y, consecuentemente, el campo eléctrico será nulo.

Por tanto, para que puedan propagarse ondas TEM es necesaria la presencia de dos conductores, como ocurre en líneas de transmisión, de manera que soporten una diferencia de potencial y que las corrientes asociadas a cada conductor se equilibren mutuamente.

Si en las ecuaciones generales dadas por (6.4) imponemos las condiciones del modo TEM, $H_z = 0$ y $E_z = 0$, obtenemos las relaciones existentes entre el campo eléctrico y el magnético de una onda TEM que ya se dedujeron en el tema anterior para una onda plana que se propaga en el medio libre

$$\widehat{\mathbf{E}}_t = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon}\mathbf{u}_z \times \widehat{\mathbf{H}}_t = -\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathbf{u}_z \times \widehat{\mathbf{H}}_t$$

donde hemos hecho uso de que la constante de propagación para una onda TEM coincide con la correspondiente a la propagación en el medio libre, $\beta = k$.

Podemos comprobar que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y están relacionados por la **impedancia de onda TEM**

$$Z_{TEM} = \frac{\widehat{E}_t}{\widehat{H}_t} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.13}$$

resultado que ya habíamos obtenido para la propagación libre.

## 3. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Como hemos comentado en la introducción, lo usual es reservar el término **línea de transmisión** para los sistemas que pueden transmitir ondas transversales electromagnéticas (TEM) que, como hemos visto, son aquellos que constan de dos o más conductores. La línea de transmisión más utilizada en un principio fue la de dos hilos paralelos y se empleó para transmitir señales de baja frecuencia, con lo cual su función principal era la de simple conexión entre sistemas que, además, no estaban muy distantes.

Posteriormente, se extendió la transmisión de señales a frecuencias más elevadas y surgieron fenómenos de inducción que había que tener en cuenta junto a los ya conocidos fenómenos resistivos. Con la aparición de estos fenómenos, se estableció una fuerte analogía entre la transmisión de señales a través de una línea (cable bifilar o coaxial) y la propagación de ondas libres, obteniéndose la conexión entre la teoría de circuitos que se desarrolló primero y el tratamiento en términos del campo electromagnético que es el apropiado en el estudio de las ondas.

Como hemos visto en la sección anterior, la distribución transversal del campo electromagnético se reduce para estos casos, a la resolución de un problema de tipo estático. Por tanto, vamos a llevar a cabo el **análisis de la propagación en la dirección longitudinal** y lo haremos en términos de la teoría de circuitos de parámetros distribuidos que nos permite un tratamiento más sencillo que el basado en la teoría de campos.

El procedimiento consiste en representar la línea en función de un modelo de circuito de parámetros distribuidos y aplicar a continuación la leyes de Kirchhoff para obtener dos ecuaciones diferenciales acopladas, una para el voltaje y otra para la corriente, que rigen la propagación de la señal en la dirección $z$.

La línea se caracteriza por un lado, en términos de su capacidad y autoinducción equivalentes por unidad de longitud (que representamos por $C$ y $L$ y cuyas unidades son F/m y H/m respectivamente). Estos parámetros están asociados respectivamente a la energía de tipo eléctrico y magnético que el sistema puede

almacenar por unidad de longitud. Y por otro, por la resistencia de los cables y la conductancia entre cables, también por unidad de longitud (que representamos por $R$ y $G$ y cuyas unidades son $\Omega$/m y S/m). Estos parámetros están asociados a la disipación energía que tendrá lugar en la línea.

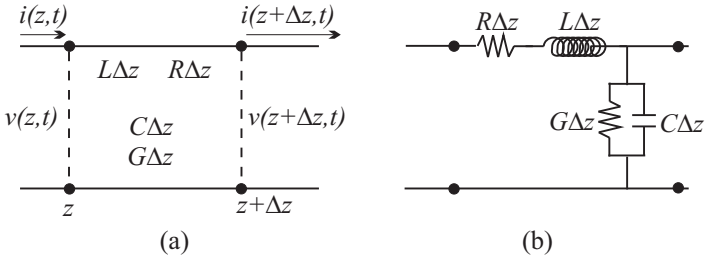



Figura 6.3. Línea de transmisión y circuito equivalente

Sin detallar su forma real, en la figura 6.3(a) se ha representado una línea de transmisión mediante la configuración usual de dos cables (uno considerado activo y otro de referencia), y en la figura 6.3(b) se muestra el circuito equivalente correspondiente a un tramo $\triangle z$ del sistema. Las cantidades $v(z,t)$ e $i(z,t)$ representan el voltaje y la corriente instantáneos en el extremo izquierdo de la sección diferencial considerada y análogamente $v(z+\triangle z,t)$ e $i(z+\triangle z,t)$ representan las mismas cantidades en el extremo derecho.

Si aplicamos las ecuaciones básicas de los circuitos a este modelo obtenemos

$$v(z,t) - v(z+\triangle z,t) = L\triangle z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + R\triangle z\, i(z,t)$$

$$i(z,t) - i(z+\triangle z,t) = C\triangle z\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + G\triangle z\, v(z,t)$$

A continuación dividimos todos los términos por $\triangle z$ y reordenamos, con lo cual tenemos

$$-\frac{v(z+\triangle z,t) - v(z,t)}{\triangle z} = L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + Ri(z,t)$$

y

$$-\frac{i(z+\triangle z,t) - i(z,t)}{\triangle z} = C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + Gv(z,t)$$

En el límite $\triangle z \to 0$ las ecuaciones anteriores se transforman en las siguientes

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + Ri(z,t) \tag{6.14}$$

y

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + Gv(z,t) \tag{6.15}$$

Como viene siendo usual, en general trataremos señales armónicas con el tiempo, por tanto, definimos sendas magnitudes fasoriales, $\widehat{V}(z)$ y $\widehat{I}(z)$, de tal forma que tanto el voltaje como la intensidad en un punto de la línea y en un instante determinado vienen dados, respectivamente, por

$$v(z,t) = \Re\left\{\widehat{V}(z)e^{j\omega t}\right\}$$

y

$$i(z,t) = \Re\left\{\widehat{I}(z)e^{j\omega t}\right\}$$

Al pasar al dominio de la frecuencia, desaparece la dependencia con el tiempo y obtenemos las siguientes ecuaciones

$$-\frac{d\widehat{V}(z)}{dz} = (R + j\omega L)\,\widehat{I}(z) \tag{6.16}$$

y

$$-\frac{d\widehat{I}(z)}{dz} = (G + j\omega C)\,\widehat{V}(z) \tag{6.17}$$

que son las denominadas **ecuaciones del telegrafista** y rigen la propagación de la señal en la línea de transmisión.

## 4. PROPAGACION DE ONDAS EN UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Las ecuaciones obtenidas en la sección anterior para la línea de transmisión son ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Podemos desacoplar estas ecuaciones y obtener una ecuación para cada una de las variables. Así, si derivamos con respecto a $z$ la ecuación (6.16) para el voltaje, obtenemos

$$-\frac{d^2\widehat{V}(z)}{dz^2} = (R + j\omega L)\,\frac{d\widehat{I}(z)}{dz}$$

sustituyendo la derivada de $\widehat{I}(z)$ dada por la ecuación (6.17) y reordenando términos, obtenemos

$$\frac{d^2\widehat{V}(z)}{dz^2} + \kappa^2\widehat{V}(z) = 0 \tag{6.18}$$

con

$$\kappa^2 = -\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right) \tag{6.19}$$

Si repetimos el mismo proceso pero intercambiando las ecuaciones, obtenemos para $\widehat{I}(z)$

$$\frac{d^2\widehat{I}(z)}{dz^2} + \kappa^2\widehat{I}(z) = 0 \tag{6.20}$$

Las expresiones (6.18) y (6.20) son ecuaciones de onda para $\widehat{V}(z)$ y $\widehat{I}(z)$ respectivamente y $\kappa$ es la constante de propagación compleja de la línea de transmisión. Ésta se puede escribir como

$$\kappa = \beta - j\alpha$$

donde $\alpha$ es la **constante de atenuación** de la línea y $\beta$ es la **constante de fase**, denominadas así por razones que se verán a continuación.

Las soluciones a las ecuaciones (6.18) y (6.20) son ondas viajeras de la forma

$$\widehat{V}(z) = V_o^+ e^{-j\kappa z} + V_o^- e^{+j\kappa z} \tag{6.21}$$

$$\widehat{I}(z) = I_o^+ e^{-j\kappa z} + I_o^- e^{+j\kappa z} \tag{6.22}$$

donde las cantidades $V_o^+$ , $V_o^-$, $I_o^+$ e $I_o^-$ son, en general, cantidades complejas que podemos escribir en forma polar como

$$V_o^+ = \left|V_o^+\right| e^{\phi^+} \qquad ; \qquad V_o^- = \left|V_o\right|^- e^{\phi^-}$$

e

$$I_o^+ = \left|I_o^+\right| e^{\psi^+} \qquad ; \qquad I_o^- = \left|I_o\right|^- e^{\psi^-}$$

Efectivamente, si regresamos al dominio del tiempo para obtener el voltaje instantáneo en cualquier punto de la línea, tenemos

$$\begin{aligned}
v(z,t) &= \Re\left\{\widehat{V}(z)e^{j\omega t}\right\} \\
&= \Re\left\{V_o^+ e^{j(\omega t - \kappa z)} + V_o^- e^{j(\omega t + \kappa z)}\right\} \\
&= \Re\left\{\left|V_o^+\right| e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z + \phi^+)} + \left|V_o^-\right| e^{\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z + \phi^+)}\right\} \\
&= \left|V_o^+\right| e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t - \beta z + \phi^+\right) + \left|V_o^-\right| e^{\alpha z}\cos\left(\omega t + \beta z + \phi^-\right)
\end{aligned}$$

donde el primer término representa una onda que viaja en la dirección positiva del eje Z y el segundo término representa una onda viajera que viaja en el sentido negativo del eje Z, ambas con una constante de fase $\beta$. El factor $e^{-\alpha z}$ da cuenta de la atenuación de la onda incidente y el factor $e^{\alpha z}$ de la atenuación de la onda reflejada. Ambas ondas se propagan con una velocidad de fase que viene dada por

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$$

La presencia de dos ondas que se propagan en direcciones opuestas da lugar a una **onda estacionaria** en la línea cuyas características analizaremos más adelante.

### 4.1. Impedancia de una línea de transmisión

Las soluciones para el voltaje y la corriente contienen dos pares de incógnitas, $(V_o^+, I_o^+)$ y $(V_o^-, I_o^-)$ correspondientes a las ondas que se propagan en ambos sentidos del eje Z. Ahora bien, las amplitudes de corriente están relacionadas con las correspondientes amplitudes de voltaje. Efectivamente, si en la ecuación (6.16) sustituimos la expresión para el voltaje y despejamos $\widehat{I}(z)$ obtenemos

$$\widehat{I}(z) = -\frac{j\kappa}{R + j\omega L}\left[V_o^+ e^{-j\kappa z} - V_o^- e^{+j\kappa z}\right]$$

y teniendo en cuenta la expresión para $\kappa$, obtenemos

$$\widehat{I}(z) = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}}\left[V_o^+ e^{-j\kappa z} - V_o^- e^{+j\kappa z}\right]$$

Así, definimos la **impedancia de una línea de transmisión** en un punto $z$ como el cociente entre el voltaje y la corriente en ese punto, esto es

$$Z(z) = \frac{\widehat{V}(z)}{\widehat{I}(z)} \tag{6.23}$$

Consideremos ahora el caso particular de una línea uniforme, alimentada por un extremo y semiindefinida en la dirección positiva del eje Z. En esta línea sólo se propagará la onda progresiva ya que no hay ningún elemento que produzca una

reflexión. Entonces el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea vendrán dados por las siguientes expresiones

$$\widehat{V}(z) = V_o^+ e^{-j\kappa z}$$

y

$$\widehat{I}(z) = I_o^+ e^{-j\kappa z} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}}\, V_o^+ e^{-j\kappa z}$$

y la impedancia de la línea será

$$Z_o = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_o^+}{I_o^+}$$

cuyo valor es

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{6.24}$$

Esta cantidad se denomina **impedancia característica de la línea**. Como vemos, es independiente de $z$ y únicamente depende de los parámetros que caracterizan la línea. De esta forma, si cortamos la línea en un punto cualquiera y conectamos una impedancia igual a $Z_o$, la línea se comportará como si fuera indefinida. O dicho de otro modo, **la impedancia característica** de una línea es aquella que colocada en el extremo de la misma absorbe toda la energía incidente y no da lugar a reflexiones.

Siguiendo un razonamiento análogo al de arriba pero para una onda que se propaga en una línea semiindefinida en la dirección negativa del eje Z llegamos a la expresión

$$Z_o = \frac{V_o^-}{I_o^-} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

por tanto, podremos expresar la corriente en cualquier punto de una línea mediante la expresión

$$\widehat{I}(z) = \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-j\kappa z} - \frac{V_o^-}{Z_o} e^{+j\kappa z} \tag{6.25}$$

de donde

$$I_o^+ = \frac{V_o^+}{Z_o} \qquad y \qquad I_o^- = \frac{V_o^-}{Z_o}$$

es decir, una vez determinadas las amplitudes de voltaje $V_o^+$ y $V_o^-$, las de corriente $I_o^+$ e $I_o^-$ se deducen a partir de las primeras y de la impedancia característica de la línea, $Z_o$.

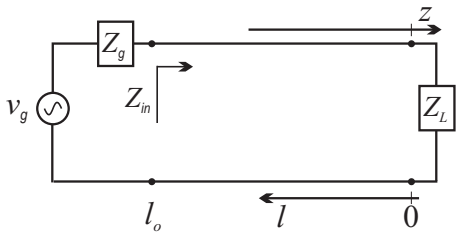



Figura 6.4. Línea de transmisión de longitud $l_o$ conectada por un extremo a un generador y por el otro a una carga $Z_L$

En la práctica las condiciones de propagación quedan determinadas por la impedancia de carga. Debido a esto, se suele cambiar de variable utilizando $l = -z$ y escogiendo el origen justamente en la carga, tal como se ha representado en la figura 6.4, de forma que las $l$ crecientes van hacia el generador.

## 4.2. Coeficiente de reflexión

Para caracterizar la propagación a lo largo de la línea suele introducirse el **coeficiente de reflexión**, definido como el cociente entre la señal reflejada e incidente

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{\widehat{V}^-(z)}{\widehat{V}^+(z)} \tag{6.26}$$

Este coeficiente será en general complejo y su variación con la posición, teniendo en cuenta la expresión (6.21) para las ondas incidente y reflejada, está determinada por

$$\widehat{\rho}(z) = \frac{V_o^-}{V_o^+}\, e^{j2\kappa z} \tag{6.27}$$

En términos de la variable $l$ que mide la distancia desde la carga

$$\widehat{\rho}(l) = \frac{V_o^-}{V_o^+}\, e^{-j2\kappa l}$$

Teniendo en cuenta la expresión general para $\kappa = \beta - j\alpha$, tenemos

$$\widehat{\rho}(l) = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l}$$

es decir, el módulo del coeficiente de reflexión disminuye con la distancia a la carga según $e^{-2\alpha l}$. En el punto donde se conecta la carga, $l = 0$ tendremos

$$\widehat{\rho}_L(z) = \frac{V_o^-}{V_o^+}$$

y por tanto, también podemos expresar el coeficiente de reflexión en cualquier punto $l$ de la línea como

$$\widehat{\rho}(l) = \widehat{\rho}_L e^{-j2\kappa l} \tag{6.28}$$

siendo $\widehat{\rho}_L$, el valor de $\widehat{\rho}$ en $l = 0$, es decir, el coeficiente de reflexión en la carga.

Vamos a obtener una expresión del coeficiente de reflexión en función de las impedancias que caracterizan la línea. Teniendo en cuenta las expresiones (6.21) y (6.25), y la definición de impedancia de la línea en un punto, tenemos

$$Z(z) = Z_o \frac{V_o^+ e^{-j\kappa z} + V_o^- e^{+j\kappa z}}{V_o^+ e^{-j\kappa z} - V_o^- e^{+j\kappa z}}$$

si dividimos numerador y denominador por $V_o^+ e^{-j\kappa z}$ y tenemos en cuenta la expresión para el coeficiente de reflexión, obtenemos

$$Z(z) \quad = \quad Z_o \frac{1 + \widehat{\rho}}{1 - \widehat{\rho}} \tag{6.29}$$

En la práctica, cuando se trabaja con líneas de transmisión es usual definir una **impedancia normalizada** que viene dada por

$$Z_N = \frac{Z}{Z_o}$$

siendo $Z_o$ la impedancia característica de la línea. Según esto, la expresión anterior queda

$$Z_N(z) = \frac{1 + \widehat{\rho}}{1 - \widehat{\rho}} \tag{6.30}$$

Despejando $\widehat{\rho}$ obtenemos una expresión para el coeficiente de reflexión en función de las impedancias de la línea

$$\widehat{\rho} = \frac{Z_N - 1}{Z_N + 1} \tag{6.31}$$

Si particularizamos para el punto donde se situa la carga,

$$Z_{LN} = \frac{1+\widehat{\rho}_L}{1-\widehat{\rho}_L} \tag{6.32}$$

Y el coeficiente de reflexión viene dado por

$$\widehat{\rho}_L = \frac{Z_{LN}-1}{Z_{LN}+1} \tag{6.33}$$

Se dice que una carga está acoplada a la línea de transmisión si se verifica que $Z_L = Z_o$ puesto que en este caso no habrá reflexión, $\rho_L = 0$. Otras situaciones de interés son las siguientes:

- Circuito abierto. Esto significa una impedancia de carga infinita, $Z_L = \infty$ y por tanto $\rho = 1$, hay reflexión total y la señal reflejada está en fase con la señal incidente.
- Cortocircuito. Esto significa una impedancia de carga nula, $Z_L = 0$ y por tanto $\rho = -1$, hay reflexión total pero la señal reflejada está en oposición de fase con la señal incidente.

## 4.3. Líneas de transmisión sin pérdidas

Como hemos visto hasta aquí, una línea de transmisión se caracteriza por dos parámetros fundamentales, su constante de propagación $\kappa$ y su impedancia característica $Z_o$. Ambas magnitudes dependen de la frecuencia de la señal y de los parámetros eléctricos de la línea ($R$, $L$, $G$ y $C$). En el caso de una línea sin pérdidas en la que podemos considerar $R = 0$ y $G = 0$, ambos parámetros son reales y toman los siguientes valores

$$\kappa = \beta = w\sqrt{LC}$$

y

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} \equiv R_o \tag{6.34}$$

La velocidad de fase para una línea de este tipo viene dada por

$$v_{ph} = \frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Las expresiones para el voltaje y la corriente se obtienen respectivamente de (6.21) y (6.22) y resultan

$$\begin{aligned} \widehat{V}(z) &= V_o^+ e^{-j\beta z} + V_o^- e^{+j\beta z} \\ \widehat{I}(z) &= \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-j\beta z} + \frac{V_o^-}{Z_o} e^{+j\beta z} \end{aligned} \tag{6.35}$$

Y el coeficiente de reflexión para una línea sin pérdidas viene dado por

$$\widehat{\rho}(l) = \frac{V_o^-}{V_o^+}\, e^{-j2\beta l}$$

Es inmediato comprobar que, en este caso, el coeficiente de reflexión varía en fase pero su módulo permanece constante a lo largo de la línea. En los apartados siguientes consideraremos líneas de transmisión sin pérdidas y al final del tema se llevará a cabo el tratamiento de las líneas con pérdidas.

**Ejercicio de autoevaluación 6.1**

Una línea de trasmisión de impedancia característica $Z_o = 100\,\Omega$ está conectada a una carga compuesta por una resistencia en serie de $30\,\Omega$ con un condensador de 10pF. Determinar el coeficiente de reflexión en la carga para una señal de 1 GHz.

**Solución**

La impedancia de la carga será

$$Z_L = R - \frac{j}{\omega C} = 30 - \frac{j}{2\pi 10^9 \times 10 \cdot 10^{-12}} = 30 - j15{,}9\,\Omega$$

y la impedancia de carga normalizada es

$$Z_{LN} = \frac{Z - L}{Z_o} = 0{,}3 - j0{,}16$$

el coeficiente de reflexión será

$$\widehat{\rho}_L = \frac{Z_{LN} - 1}{Z_{LN} + 1} = \frac{-0{,}7 - j0{,}16}{1{,}3 - j0{,}16} = -\frac{0{,}72\, e^{j0{,}23}}{1{,}31\, e^{j0{,}123}} = -0{,}55\, e^{j0{,}11}$$

Teniendo en cuenta que el signo menos equivale a $e^{-j\pi}$, tenemos finalmente

$$\widehat{\rho}_L = 0{,}55\, e^{-j3{,}03}$$

Es decir, el módulo y la fase del coeficiente de reflexión en la carga son

$$\rho_L = |\widehat{\rho}_L| = 0{,}55 \qquad y \qquad \theta_L = -3{,}03 \text{ rad} = -173{,}8^o$$

## 5. CARACTERIZACIÓN DE LA ONDA ESTACIONARIA EN UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Como ya hemos comentado, las expresiones dadas por (6.35) constituyen ondas elementales progresivas cuya asociación va a dar lugar, en general, a la formación de una onda estacionaria. En este apartado vamos caracterizar esta onda estacionaria y para ello obtendremos los diagramas de voltaje e intensidad correspondientes a una onda estacionaria en general.

Partiendo de las expresiones (6.35) y teniendo en cuenta la definición del coeficiente de reflexión en un punto de la línea en función del coeficiente de reflexión en la carga, podemos escribir

$$\begin{aligned} \widehat{V}(z) &= V_o^+ e^{-j\beta z}\left[1+\widehat{\rho}_L e^{j2\beta z}\right] \\ \widehat{I}(z) &= \frac{V_o^+}{Z_o} e^{-j\beta z}\left[1-\widehat{\rho}_L e^{j2\beta z}\right] \end{aligned} \tag{6.36}$$

donde $Z_o$ es real y $\widehat{\rho}_L$ es un número complejo, de módulo constante y fase dada por $\theta_L$. Vamos a calcular los módulos de estos fasores. Para el voltaje tenemos

$$\begin{aligned} V^2(z) &= \left|\widehat{V}(z)\right|^2 = \widehat{V}(z)\widehat{V}^*(z) \\ &= V_o^+ e^{-j\beta z}\left[1+\widehat{\rho}_L e^{j2\beta z}\right]\left(V_o^+\right)^* e^{j\beta z}\left[1+\widehat{\rho}_L^* e^{-j2\beta z}\right] \\ &= \left|V_o^+\right|^2\left\{1+\rho^2+2\rho\cos\left(2\beta z+\theta_L\right)\right\} \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $|\widehat{\rho}_L| = \rho$ es constante para una línea sin pérdidas. Por tanto tenemos

$$V(z) = \left|V_o^+\right| \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos\left(2\beta z + \theta_L\right)} \tag{6.37}$$

y para la corriente

$$I(z) = \frac{|V_o^+|}{Z_o} \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos\left(2\beta z + \theta_L\right)} \tag{6.38}$$

Los valores máximos y mínimos se alcanzan cuando $\cos\left(2\beta z + \theta_L\right) = \pm 1$ y son

$$V_{\text{máx}} = \left|V_o^+\right|(1+\rho) \qquad y \qquad V_{\text{mín}} = \left|V_o^+\right|(1-\rho)$$

para el voltaje, y

$$I_{\text{máx}} = \left|\frac{V_o^+}{Z_o}\right|(1+\rho) \qquad y \qquad I_{\text{mín}} = \left|\frac{V_o^+}{Z_o}\right|(1-\rho)$$

para la corriente.

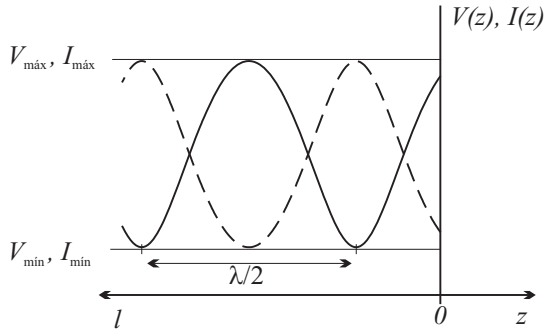



Figura 6.5. Patrón de onda estacionaria para la tensión y la corriente en una líneas de transmisión

En la figura 6.5 se muestra el patrón de onda estacionaria para el voltaje y la corriente en una línea de transmisión sin pérdidas terminada en una carga genérica $Z_L$. Esta onda estacionaria se debe a la interferencia de dos ondas, la incidente y la reflejada. El valor máximo de un patrón de onda estacionaria de $V(z)$ corresponde a la posición en la línea donde las ondas incidente y reflejada están en fase, esto es

$$2\beta z + \theta_L = 2n\pi$$

y por consiguiente las ondas se suman. El valor mínimo de $V(z)$ corresponde a la posición en la línea donde las ondas incidente y reflejada están en oposición de fase, esto es

$$2\beta z + \theta_L = (2n+1)\pi$$

y por consiguiente las ondas se restan. Podemos ver que los patrones de onda estacionaria de voltaje y corriente están, a su vez, en oposición de fase. Cuando el voltaje alcanza el máximo, la corriente tomará su valor mínimo. Estos patrones de onda estacionaria describen las variaciones de $V(z)$ e $I(z)$ como funciones de $z$. Si pasamos al dominio del tiempo, en cada punto de la línea los valores de voltaje y corriente estarían afectados por la función $\cos\omega t$.

Vamos a analizar algunos casos particulares de especial interés:

- Línea acoplada con $Z_L = Z_o$. En este caso el coeficiente de reflexión es nulo para todos los valores de $z$ y $V(z) = V_o^+$, es decir, no hay onda reflejada y por tanto no hay patrón de onda estacionaria
- Línea cortocircuitada, $Z_L = 0$. En este caso, el coeficiente de reflexión es $\rho_L = -1$ en $l = 0$, que es la posición de la carga, y esto corresponde a una onda reflejada de igual magnitud que la incidente pero opuesta en fase. En consecuencia, tendremos un valor nulo para el voltaje, $V = 0$, y un valor máximo para la corriente, $I = I_{\text{máx}}$, tal como corresponde físicamente a un cortocircuito.
- Línea terminada en circuito abierto, $Z_L = \infty$. En este caso el coeficiente de reflexión es $\rho_L = 1$ en $l = 0$, que es la posición de la carga, y esto corresponde a una onda reflejada de igual magnitud que la incidente y en fase con ella En consecuencia, tendremos un valor máximo para el voltaje, $V = V_{\text{máx}}$, y un valor nulo para la corriente, $I = 0$, tal como corresponde físicamente a un circuito abierto.

En la figura 6.6 se representa el diagrama de onda estacionaria para el voltaje correspondiente a los tres casos comentados. Evidentemente, el rango posible de valores de $\rho$ está entre 0 y 1, no pudiendo ser mayor que la unidad pues ello significaría mayor potencia reflejada que incidente, lo cual es imposible si la carga se supone pasiva. El diagrama de onda estacionaria para la corriente se deduce fácilmente de lo estudiado y se deja como ejercicio para el estudiante.

En estas gráficas destaca en primer lugar que, para cada situación, los valores de los máximos y de los mínimos son iguales y esto es una consecuencia directa

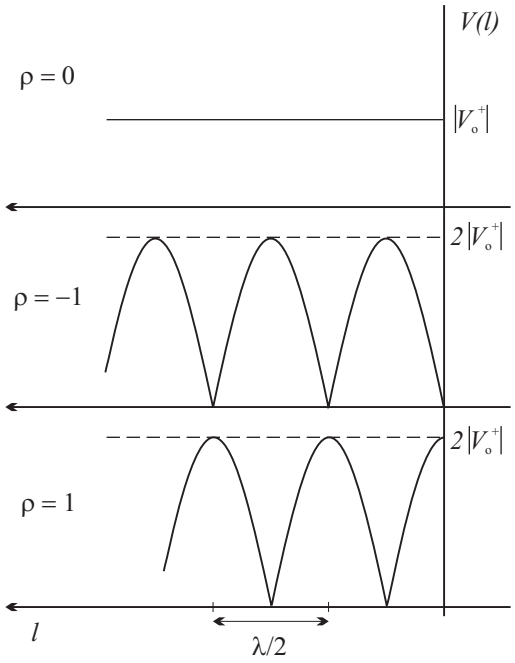



Figura 6.6. Patrones de onda estacionaria correspondientes a *a)* línea acoplada; *b)* línea cortocircuitada y *c)* línea en circuito abierto

de la hipótesis de pérdidas nulas. Por otra parte comprobamos que los máximos y mínimos están separados entre sí $\lambda/2$, y que la variación en torno a los mínimos mucho más acusada.

La forma del diagrama de onda estacionaria, en lo que respecta a la relación entre máximo y mínimo, así como a la localización de los mismos, depende exclusivamente del carácter de la carga en que termina la línea.

## 5.1. Razón de onda estacionaria

Para caracterizar una onda estacionaria se introduce como parámetro básico la denominada **razón de onda estacionaria** que se define como el cociente entre

los valores del voltaje máximo y mínimo

$$S = \frac{|V_{\text{máx}}|}{|V_{\text{mín}}|} \tag{6.39}$$

Teniendo en cuenta los valores de $V_{\text{máx}}$ y $V_{\text{mín}}$ obtenidos anteriormente, tenemos que

$$S = \frac{1+\rho}{1-\rho} \tag{6.40}$$

y el módulo del coeficiente de reflexión en función de la razón de onda estacionaria es

$$\rho = \frac{S-1}{S+1} \tag{6.41}$$

Con lo cual, si somos capaces de medir la razón de onda estacionaria en la línea podemos determinar el módulo del coeficiente de reflexión. La introducción del parámetro $S$ sólo tiene sentido en líneas sin pérdidas o con pérdidas suficientemente pequeñas. En el caso ideal la razón de onda estacionaria se mantiene constante a lo largo de toda la línea mientras que en el caso de pérdidas pequeñas los valores de $S$ en puntos alejados serán diferentes como consecuencia de la atenuación de la onda con la distancia.

En función del valor de la carga la razón de onda estacionaria podrá tomar valores que van desde $S = 1$ para el caso de onda progresiva o línea acoplada ($\rho = 0; Z_L = Z_o$), hasta $S \to \infty$ para ondas totalmente estacionarias correspondientes a cortocircuito o circuito abierto, $|\rho| = 1$.

Evidentemente, para caracterizar completamente el coeficiente de reflexión, o lo que es lo mismo, la impedancia de carga, necesitamos información de la fase de $\rho$. Esto se consigue mediante la determinación de las posiciones de los mínimos, referidas a la posición de la carga. Podría servir igualmente la localización de los máximos en el diagrama de onda estacionaria, pero se utilizan los mínimos porque la variación en torno a estos es mucho más acusada que en torno a los máximos y es posible determinar su posición experimentalmente con mucha mayor precisión. Una vez localizados dos mínimos, podemos determinar automáticamente la longitud de onda que es el doble de la distancia entre mínimos consecutivos y este dato nos sirve para medir la frecuencia.

Para relacionar la fase de $\widehat{\rho}$ en la carga $\theta_L$ con la posición de los mínimos, acudimos a la expresión de (6.37) cambiando $z$ por $-l$

$$V(z) = \left|V_o^+\right| \sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos\left(-2\beta l+\theta_L\right)}$$

El primer mínimo respecto a la carga, que supondremos situado en $l = l_1$, se producirá cuando

$$-2\beta l_1 + \theta_L = \pi$$

y se repetirán los mínimos cada semilongitud de onda, como ya hemos citado. La relación obtenida conduce a que

$$\frac{\theta_L}{2} - \beta l_1 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \cos(\frac{\theta_L}{2} - \beta l_1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

y por tanto, desarrollando el coseno de una diferencia y reordenando, obtenemos

$$\frac{1}{\tan(\theta_L/2)} = -\tan(\beta l_1)$$

lo que nos permite determinar $\theta_L$ experimentalmente y por tanto, precisar completamente el coeficiente de reflexión en cualquier punto de la línea.

Por otro lado, la determinación de $S$ y de la posición de un mínimo $l_1$ nos permite determinar la impedancia de carga. Efectivamente, a partir de la expresión (6.29) que relaciona la impedancia de la línea $Z$ con $\widehat{\rho}$

$$\frac{Z_L}{Z_o} = \frac{1+\widehat{\rho}_L}{1-\widehat{\rho}_L}$$

y operando adecuadamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{Z_L}{Z_o} &= \frac{1+\rho e^{j\theta_L}}{1-\rho e^{j\theta_L}} \\ &= \frac{\frac{1}{S} - j\tan(\beta l_1)}{1 - \frac{1}{S} j\tan(\beta l_1)} \end{aligned} \tag{6.42}$$

expresión que nos da $Z_{LN}$ conocidos $S$ y $l_1$.

Una técnica de laboratorio frecuentemente utilizada para la determinación del diagrama de onda estacionaria es mediante líneas o guías ranuradas. En la figura 6.7 se esquematiza una línea coaxial ranurada. La ranura se hace de tal forma que no corte las líneas de corriente asociadas a la distribución del campo electromagnético del modo en cuestión, en este caso el modo TEM, con lo cual la perturbación que introduce la presencia de la ranura es pequeña. A través de dicha ranura se puede introducir una sonda metálica que en el caso de la figura muestreará la componente radial del campo eléctrico existente en la línea. Las

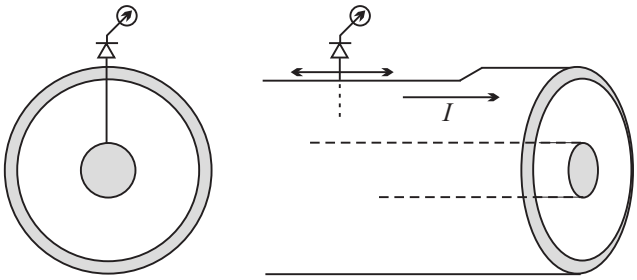



Figura 6.7. Linea coaxial ranurada con dispositivo para la localización de máximos y mínimos de tensión

corrientes que induce el campo en la sonda pueden ser detectadas mediante un rectificador y llevadas a un medidor de continua. Normalmente los detectores utilizados operan en el rango de baja señal y poseen respuesta cuadrática, con lo que las lecturas del medidor serán proporcionales al cuadrado de la tensión (o del campo). Así, si son $A_M$ y $A_m$ las lecturas correspondientes a un máximo y a un mínimo, respectivamente, la razón de onda estacionaria vendrá dada por

$$S = \left(\frac{A_M}{A_m}\right)^{1/2}$$

## 5.2. Impedancia de entrada de una línea sin pérdidas

En muchos problemas de interés práctico se necesita conocer la impedancia a la entrada de la línea, esto es, en $z = 0$ o de forma equivalente, $l = l_o$, donde $l_o$ es la longitud total de la línea. A partir de la expresión de la impedancia de la línea en un punto, ecuación (6.29) y de la expresión del coeficiente de reflexión dada por (6.28) podemos obtener la siguiente expresión para la impedancia de la línea en un punto cualquiera

$$\frac{Z_l}{Z_o} = \frac{1+\widehat{\rho}}{1-\widehat{\rho}} = \frac{1+\widehat{\rho}_L e^{-j2\beta l}}{1-\widehat{\rho}_L e^{-j2\beta l}}$$

Aplicando (6.33) y operando adecuadamente, obtenemos

$$\begin{aligned} Z_l &= Z_o \frac{(Z_{LN}+1)+(Z_{LN}-1)e^{-j2\beta l}}{(Z_{LN}+1)-(Z_{LN}-1)e^{-j2\beta l}} \\ &= \frac{Z_L \cos\beta l + jZ_o \operatorname{sen}\beta l}{Z_o \cos\beta l + jZ_L \operatorname{sen}\beta l} \\ &= \frac{Z_L + jZ_o \tan\beta l}{Z_o + jZ_L \tan\beta l} \end{aligned} \tag{6.43}$$

En particular, en la entrada de la línea, tendremos

$$Z_{in} = \frac{Z_L + jZ_o \tan\beta l_o}{Z_o + jZ_L \tan\beta l_o} \tag{6.44}$$

Desde el punto de vista del circuito generador, la línea de transmisión puede reemplazarse con una impedancia $Z_{in}$, como se esquematiza en la figura 6.4. El voltaje a través de $Z_{in}$ viene dado por

$$\widehat{V}_{in} = \widehat{I}_{in} Z_{in}$$

con

$$\widehat{I}_{in} = \frac{\widehat{V}_g}{Z_g + Z_{in}}$$

donde $\widehat{V}_g$ y $Z_g$ son el voltaje suministrado por el generador y su impedancia interna respectivamente. Entonces

$$\widehat{V}_{in} = \widehat{V}_g \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}$$

Sin embargo, desde el punto de vista de la línea de transmisión, el voltaje en la entrada de la línea se determina mediante la expresión (6.36) particularizada para $l = l_o$

$$\widehat{V}_{in} = V_o^+ e^{j\beta l_o} \left[1 + \widehat{\rho}(l_o)\right] = V_o^+ \left[e^{j\beta l_o} + \widehat{\rho}_L e^{-j\beta l_o}\right]$$

igualando ambas expresiones y despejando $V_o^+$, obtenemos finalmente

$$V_o^+ = \widehat{V}_g \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} \left(\frac{1}{e^{j\beta l_o} + \widehat{\rho}_L e^{-j\beta l_o}}\right) \tag{6.45}$$

Este resultado completa la solución de las ecuaciones de onda de la línea de transmisión sin pérdidas. Como recordaremos, partíamos de cuatro incognitas, $V_o^+$, $V_o^-$, $I_o^+$ e $I_o^-$. Luego encontramos que las amplitudes de la corriente se relacionaban con las de voltaje a través de la impedancia característica de la líneas, $Z_o = V_o^+/I_o^+ = V_o^-/I_o^-$. Más adelante, al aplicar la condición de que la línea termina en una carga, hemos relacionado las amplitudes de voltaje entre sí mediante el coeficiente de reflexión, y por último, la existencia de un generador en el extremo emisor de la línea, nos permite obtener $V_o^+$.

## 6. POTENCIA TRANSMITIDA EN UNA LÍNEA SIN PÉRDIDAS

Hasta aquí hemos estudiado el voltaje y la corriente a lo largo de una línea de transmisión. A continuación examinaremos la potencia transmitida por la línea. Como viene siendo usual, en general trataremos señales armónicas con el tiempo y por tanto nos interesa, más que la potencia instantánea, la potencia promedio transportada, esto es

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \widehat{V} \cdot \widehat{I}^* \right\} \tag{6.46}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (6.36), la potencia promedio queda

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_o} \left[ 1 - \rho^2 \right] \tag{6.47}$$

donde hemos tenido en cuenta que la impedancia característica de una línea sin pérdidas es una cantidad real.

Si hacemos el mismo cálculo para la onda incidente y reflejada de forma separada, obtenemos

$$\left\langle P^i \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_o} \tag{6.48}$$

para la potencia promedio incidente, y

$$\langle P^r \rangle = \rho^2 \frac{1}{2} \frac{|V_o^+|^2}{Z_o} = \rho^2 \left\langle P^i \right\rangle \tag{6.49}$$

para la potencia reflejada. Lo que significa que la expresión (6.47) nos da la potencia neta promedio suministrada a la carga.

**Ejercicio de autoevaluación 6.2**

Una línea de trasmisión de impedancia característica $Z_o = 100\,\Omega$ está conectada a una carga $Z_L = (50 + j100)\,\Omega$. Determinar la fracción de la potencia promedio incidente que es reflejada por la carga.

**Solución**

El coeficiente de reflexión en la carga viene dado por

$$\widehat{\rho}_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$$

sustituyendo los valores de $Z_L$ y $Z_o$, tenemos

$$\widehat{\rho}_L = \frac{50 + j100 - 100}{50 + j100 + 100} = \frac{5 + j40}{45}$$

y el cuadrado del módulo del coeficiente de reflexión es

$$\rho^2 = 0{,}80$$

Luego la fracción de la potencia promedio incidente que es reflejada por la carga será

$$\langle P^r \rangle = \rho^2 \langle P^i \rangle$$

es decir

$$\frac{\langle P^r \rangle}{\langle P^i \rangle} = \rho^2 = 0{,}80$$

## 7. EL DIAGRAMA DE SMITH

Hemos descrito el comportamiento de una línea de transmisión en términos del voltaje y la intensidad y también en términos de las ondas progresivas incidente y reflejada. Además, hemos introducido el coeficiente de reflexión con el que se obtiene una visión muy directa de las diferentes situaciones que pueden presentarse. También hemos introducido el concepto de impedancia de la línea porque además de ser un parámetro muy familiar ya que está presente en la teoría de circuitos, nos va a permitir simplificar las situaciones correspondientes a asociaciones de

elementos serie o paralelo.

Desde un punto de vista práctico, cuando abordamos un problema en particular, existen aspectos cuyo análisis conviene hacerlo en términos de impedancias y otros que se prestan mejor a un tratamiento en términos del coeficiente de reflexión. Lo importante es que podemos realizar el análisis en la forma más conveniente y tenemos un procedimiento sencillo de trasladar los resultados que se obtengan de un planteamiento al otro.

Desde un punto de vista formal las relaciones (6.30) y (6.31) establecen una transformación bilineal entre los planos complejos correspondientes a $Z$ y a $\widehat{\rho}$. Actualmente la utilización de ordenadores facilita mucho todo el aspecto operativo, pero dada la importancia que ha tenido y que aún conserva, vamos a desarrollar en este apartado un procedimiento gráfico basado en la **carta de Smith** que facilita la resolución de todos los problemas operativos que surgen de la necesidad de transformar los diversos resultados en términos de $Z$ y de $\widehat{\rho}$.

Esta carta consiste en una representación de las impedancias en el plano complejo correspondiente al coeficiente de reflexión y parte del supuesto de que la descripción del comportamiento de la línea es más secilla en términos del coeficiente de reflexión $\rho$.

El coeficiente de reflexión es, en general, una cantidad compleja que en forma binómica podemos escribir como

$$\widehat{\rho} = \rho_r + j\rho_i \tag{6.50}$$

La carta de Smith se sitúa en el plano complejo de $\widehat{\rho}$. Puesto que se verifica que $\rho \leq 1$, sólo el interior del círculo unitario correspondiente a $\rho = 1$ tendrá significado físico. Por otro lado, cualquier impedancia normalizada también es una cantidad compleja que en forma binómica podemos expresar como

$$Z_N = R_N + jX_N \tag{6.51}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6.32) y (6.50) obtenemos

$$R_N + jX_N = \frac{(1+\rho_r) + j\rho_i}{(1-\rho_r) - j\rho_i}$$

Racionalizando esta expresión, obtenemos las expresiones para $R_N$ y $X_N$ en función de $\rho_r$ y $\rho_i$

$$R_N = \frac{1 - \rho_r^2 - \rho_i^2}{(1-\rho_r^2)^2 + \rho_i^2} \tag{6.52}$$

y

$$X_N = \frac{2\rho_i}{(1-\rho_r^2)^2 + \rho_i^2} \tag{6.53}$$

La primera de estas expresiones establece que para un valor determinado de $R_N$ existen infinitas posibles combinaciones de $\rho_r$ y $\rho_i$. En particular, el lugar geométrico del plano complejo para un valor constante de la resistencia normalizada resulta ser un círculo. Efectivamente, a partir de la ecuación (6.52) obtenemos la siguiente ecuación paramétrica

$$\left(\rho_r - \frac{R_N}{1+R_N}\right)^2 + \rho_i^2 = \left(\frac{1}{1+R_N}\right)^2$$

que es la de un círculo en el plano complejo $\rho_r - \rho_i$ que tiene su centro en el punto $(R_N/[1+R_N],\, 0)$ y su radio es $(1/[1+R_N])$. El círculo más grande corresponde a $R_N = 0$ y coincide con el círculo de radio unidad, $\rho = 1$ del plano complejo $\rho_r$-$\rho_i$ como se muestra en la figura 6.8. Este resultado era de esperar ya que cuando la impedancia no tiene componente resistiva, $R_N = 0$, el módulo del coeficiente de reflexión es la unidad sin importar la magnitud de $X_N$.

Análogamente, para la componente reactiva de la carga obtenemos la siguiente ecuación paramétrica

$$(\rho_r - 1)^2 + \left(\rho_i - \frac{1}{X_N}\right)^2 = \frac{1}{X_N^2}$$

que es también la ecuación de un círculo. Ahora bien, a diferencia de la resistencia normalizada que no puede ser negativa, la reactancia normalizada puede tener tanto valores positivos como negativos. Por tanto, esta ecuación genera dos familias de círculos, una correspondiente a valores negativos de $X_N$ y otra a valores positivos. Además, como se muestra en la figura 6.8, el círculo de radio unidad, $\rho = 1$, sólo engloba a parte de los círculos de reactancia constante.

La carta de Smith es la representación en el plano complejo $\rho_r$-$\rho_i$ de las familias de círculos de estas dos ecuaciones paramétricas para determinados valores seleccionados de $R_N$ y $X_N$. El perímetro de la carta contiene tres escalas concéntricas. La escala más interna suministra la fase del coeficiente de reflexión en grados. Las escalas más externas, denominadas escala de **longitudes de onda hacia la carga y hacia el generador**, se utilizan para reflejar el movimiento en la línea de transmisión bien hacia la carga, bien hacia el generador y cuya utilidad veremos claramente más adelante, cuando analicemos las aplicaciones de este método gráfico. Además de las escalas concéntricas, cada carta de Smith trae, en la

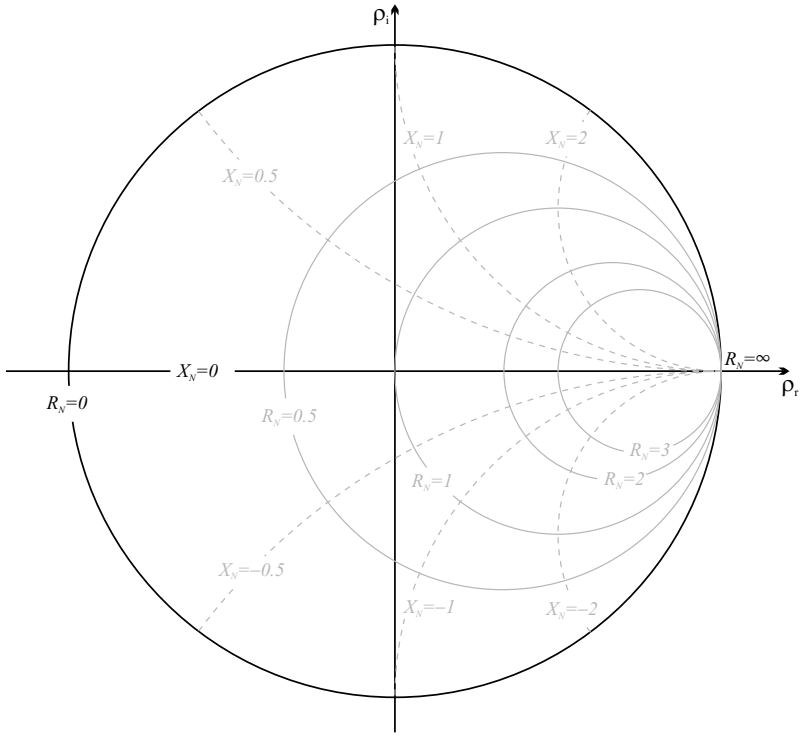



Figura 6.8. Familias de círculos $R_N = cte$ y $X_N = cte$ en el dominio $\rho \leq 1$

parte inferior, escalas lineales para los parámetros que están radialmente escalados en el diagrama, como el coeficiente de reflexión y la razn de onda estacionaria.

## 7.1. Aplicaciones de la carta de Smith

La carta de Smith proporciona un sistema de cálculo rápido, cuyas propiedades básicas destacaremos a continuación, mediante un estudio de diferentes casos de aplicación.

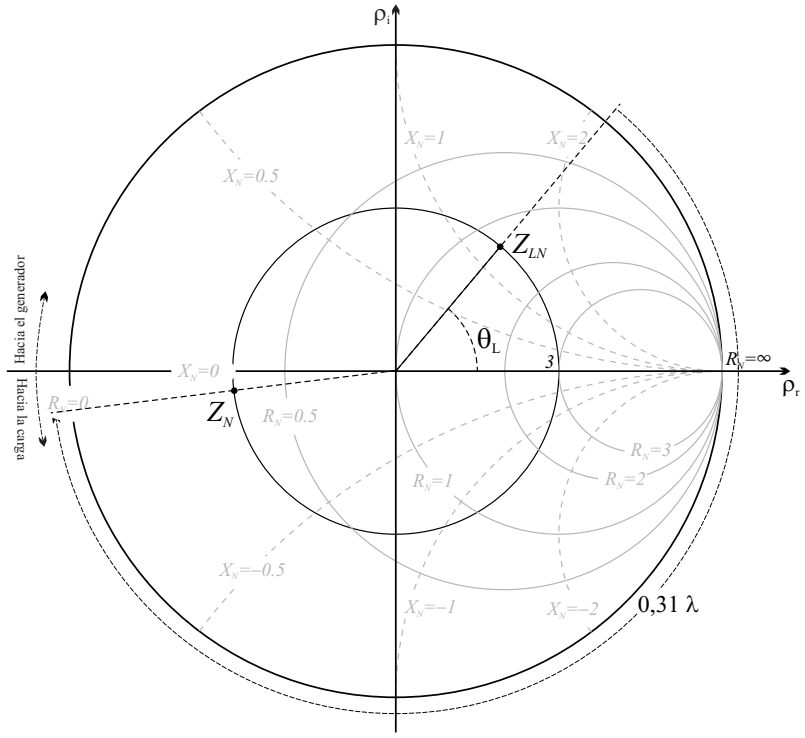



Figura 6.9. Calculo de $\rho$ y transformación de la impedancia de la línea

### *Conocida $Z_L$ calcular $\rho$*

En primer lugar calculamos la impedancia de carga normalizada, $Z_{LN} = Z_L/Z_o$ y la representamos en la carta. Una vez localizada $Z_{LN}$, la distancia al centro nos dará el módulo del coeficiente de reflexión en el punto donde se sitúa la carga, $\rho$. Para determinar esta distancia con relación a la unidad, podemos hacer uso de la escala que aparece en la parte inferior de la carta. La fase del coeficiente de reflexión se puede leer en la escala más interna del diagrama que viene dada en grados.

**Ejercicio de autoevaluación 6.3**

Una línea de trasmisión de impedancia característica $Z_o = 50\,\Omega$ está conectada a una carga $Z_L = (60 + j65)\,\Omega$. Determinar el coeficiente de reflexión, módulo y fase.

**Solución**

En primer lugar calculamos la impedancia de carga normalizada

$$Z_{LN} = \frac{Z_L}{Z_o} = \frac{60 + j65}{50} = 1{,}2 + j1{,}3$$

Representamos la impedancia en la carta como se indica en la figura 6.9. El módulo del coeficiente de reflexión es la distancia de este punto al origen expresado como fracción del radio unidad. Para obtener el valor de $\rho$ se traslada la distancia radial a la escala lineal que se proporciona en la parte inferior de la carta de Smith con la ayuda de un compás, por ejemplo.

$$\rho = 0{,}52$$

Por otra parte, la fase del coeficiente de reflexión referido a esta posición particular (es decir, la fase del voltaje de la onda reflejada con respecto a la incidente en dicho punto) es, según la definición de $\widehat{\rho}$ el ángulo medido desde el semieje positivo del eje real en sentido antihorario. La lectura de la fase de $\rho$ se hace directamente en la escala concéntrica interna. En el caso de nuestro ejemplo, $\theta_L = 50^o$. Por tanto, el coeficiente de reflexión en la carga es

$$\widehat{\rho}_L = 0{,}52\, e^{j50^o}$$

### *Transformación de impedancias*

Una vez fijada la frecuencia de operación podemos saber la longitud de onda en la línea. Si necesitamos conocer el valor de la impedancia a una distancia $l_o$ de la carga lo primero que hacemos es localizar la impedancia de carga en la carta. Seguidamente establecemos el valor de $l_o$ en unidades de longitud de onda y, a continuación, haciendo uso de la escala externa de la carta de Smith identificada

como **longitudes de onda hacia el generador** giramos sobre la circunferencia correspondiente a $\rho$ constante, el valor de $l_o$ localizando así el valor de $Z_N$ en la carta.

Cuando recorremos la circunferencia correspondiente a $\rho$ constante, para una impedancia determinada, el punto de cruce con el eje real positivo del plano $\rho_r - \rho_i$ corresponde al valor de $\widehat{\rho} = +\rho$ y en dicho punto la impedancia será real y de valor

$$Z_N = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$$

que coincide con la razón de onda estacionaria según se refleja en la relación (6.40).

Además, el punto de cruce con la parte positiva del eje real coincide con la posición de **un máximo de tensión**, dado que esta situación corresponde, como ya se ha citado, a $\widehat{\rho} = +\rho$. De fóma análoga, el cruce con la parte negativa del eje real corresponde a la posición de **un mínimo de tensión** y en este punto la impedancia de la línea es real y su valor es $S^{-1}$.

### Ejercicio de autoevaluación 6.4

Determinar la impedancia de la línea del ejemplo anterior a una distancia $0,31\lambda$ de la carga y la razón de onda estacionaria.

### Solución

Volvemos de nuevo a la figura 6.9 y calculamos el azimut correspondiente a la impedancia de carga con la ayuda de la escala concéntrica de longitudes de onda hacia el generador

$$\theta_L = 0{,}180\lambda$$

A continuación nos desplazamos sobre el círculo $\rho = cte$ un ángulo equivalente a la distancia $0,31\lambda$, de forma que la impedancia que buscamos tendrá un azimut igual a

$$\theta = \theta_L + 0{,}31\lambda = 0{,}49\lambda$$

El punto del círculo $\rho = 0{,}52$ con este azimut corresponde a la impedancia normalizada

$$Z_N = 0{,}33 - j0{,}18$$

que corresponde a una impedancia

$$Z = Z_N Z_o = (16{,}5 - j9)\,\Omega$$

Y el corte del mencionado círculo con el eje real positivo nos proporciona la razón de onda estacionaria por lectura directa en la carta, en este caso

$$S = 3$$

***Dada $S$ y la posición de un mínimo, encontrar $Z_L$***

Esta es una técnica frecuentemente utilizada para determinar experimentalmente el valor de la impedancia de carga. Una vez medida $S$ se traza, de acuerdo con lo visto anteriormente, la circunferencia correspondiente a $\rho$ constante, que cortará al eje real positivo precisamente en el punto $Z_N = S$. En el punto simétrico respecto al origen, tendríamos el valor de la impedancia en la posición del mínimo. A continuación, puesto que conocemos la posición del primer mínimo respecto a la carga, nos moveremos hacia la carga con la ayuda de la escala **longitudes de onda hacia la carga** un arco determinado por la localización del mínimo y así localizamos $Z_{LN}$ sobre la circunferencia de $\rho$ constante.

***Utilización de la carta operando con admitancias***

Por un lado, podemos comprobar que en la carta de Smith un cambio de signo de $\widehat{\rho}$ se corresponde con localizar el punto simétrico respecto del origen. A su vez, teniendo en cuenta la relación que liga a $Z_N$ y $\widehat{\rho}$

$$Z_N = \frac{1+\widehat{\rho}}{1-\widehat{\rho}}$$

el cambio de signo de $\widehat{\rho}$ significa calcular el inverso de $Z_N$, es decir la admitancia

$$Y_N = Z_N^{-1} = \left(\frac{1-\widehat{\rho}}{1+\widehat{\rho}}\right)$$

Por tanto, en la carta de Smith invertir un número complejo corresponde simplemente a localizar su simétrico respecto al origen. Consecuentemente, trabajar con admitancias sigue un camino completamente análogo a operar con impedancias.

Así, por ejemplo, el punto de corte de la circunferencia $\rho = 1$ con el eje real positivo corresponde a una impedancia infinita (circuito abierto) mientras que el punto simétrico respecto al origen, corte de la circunferencia con el eje real negativo, corresponde a una admitancia nula. Análogamente, este punto corresponde a una impedancia nula (cortocircuito) y el simétrico respecto al origen, a admitancia infinita.

**Ejercicio de autoevaluación 6.5**

Tenemos una línea de transmisión con $Z_o = 100\,\Omega$. Determinar la impedancia de carga sabiendo que la razón de onda estacionaria es $S = 3$ y el primer mínimo está situado a $0{,}224\lambda$ de la carga. Calcular la admitancia de carga correspondiente con la ayuda de la carta de Smith.

**Solución**

Como se ha comentado antes, en el eje real figuran los valores de la razón de onda estacionaria. Localizamos el valor $S = 3$ y trazamos el círculo de $\rho = cte$ correspondiente a este valor de $S$. El punto simétrico en el eje real negativo corresponde con la posición del primer mínimo. Desde aquí, nos **desplazamos hacia la carga** usando la escala concéntrica de la carta una distancia $l_o = 0{,}224\lambda$ como se muestra en la figura 6.10. El corte del radio determinado por este desplazamiento con el círculo trazado anteriormente nos proporciona el valor de la impedancia de carga normalizada. Por lectura directa de la carta tenemos que $Z_{LN} = 2{,}4 - j$ y la impedancia de carga será

$$Z_L = Z_{LN} Z_o = (240 - j100)\,\Omega$$

Para calcular la admitancia de carga normalizada, buscamos el punto simétrico a $Z_{LN}$. La lectura de la carta nos da $Y_{LN} = 0{,}36 + j0{,}15$ y la admitancia de carga será

$$Y_L = Y_{LN} Y_o = (0{,}36 + j0{,}15) \cdot 10^{-2}\,\Omega^{-1}$$

## 8. ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS

Si en un punto dado de la línea conseguimos que la impedancia vista desde el generador sea $Z_o$, en este punto no habrá onda reflejada. Si además esto lo

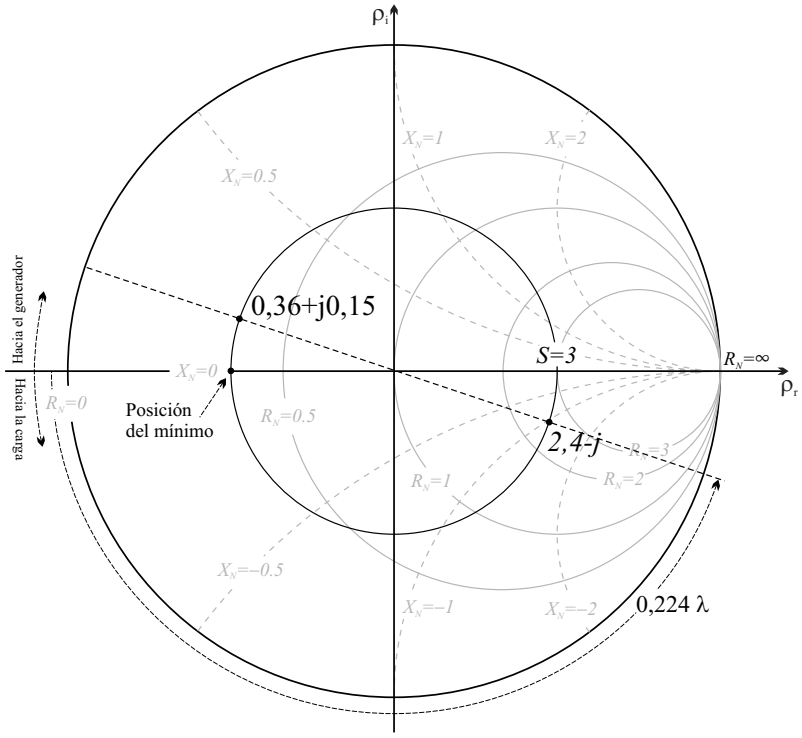



Figura 6.10. Cálculo de la impedancia a partir de la posición de un mínimo y del valor de la razón de onda estacionaria

conseguimos mediante la colocación en paralelo de impedancias reactivas (no disipativas), logramos transmitir el máximo de energía a la carga. Este es el principal objetivo desde un punto de vista práctico.

La adaptación de impedancias puede obtenerse por diversos procedimientos entre los cuales, y a modo de ejemplo de aplicación de la carta de Smith, vamos a citar la adaptación mediante **sintonizador simple** y **doble**.

## 8.1. Adaptación de impedancias mediante un sintonizador simple

Se denomina **sintonizador** a un tramo de línea de longitud variable que normalmente acaba en cortocircuito y se acopla en paralelo con la línea principal, tal

como se esquematiza en la figura 6.11. De acuerdo con resultados ya obtenidos, si la línea es sin pérdidas, a lo largo del sintonizador puede obtenerse cualquier valor de impedancia reactiva (parte real nula).

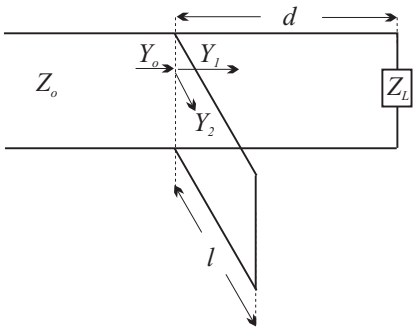



Figura 6.11. Adaptación de impedancias mediante un sintonizador simple

En la figura 6.11, $Y_o$ representa la admitancia total de la línea en el punto considerado y es la suma de dos admitancias, $Y_1$ e $Y_2$. La primera es la admitancia de la línea principal en ese punto mientras que $Y_2$ es la admitancia del sintonizador.

$$Y_o = Y_1 + Y_2$$

La impedancia $Y_1$ se obtiene transformando $Y_L$ a lo largo del tramo de línea de longitud $d$ con la ayuda de la carta. Por otra parte, $Y_2$ proviene de transformar la admitancia infinita debida al cortocircuito en que finaliza el sintonizador, a lo largo de la longitud $l$ del mismo. Puesto que $Y_2$ es puramente reactiva, estará situada en la circunferencia unitaria (la más externa que delimita la carta) y que corresponde a $R_N = 0$.

En la figura 6.12 se lleva a cabo la adaptación con un sintonizador en cortocircuito. El problema se reduce a hallar un punto de la línea en que la admitancia normalizada sea de la forma $Y_1 = 1 \pm jb$. Para ello nos desplazamos, como se indica en esta figura, desde $Y_{LN}$ hacia el generador hasta encontrar los puntos de corte con la circunferencia $g = 1$. El arco recorrido desde $Y_{LN}$ hasta $Y_1 = 1 + jb$ o $Y_1' = 1 - jb$ nos dará las distancias $d$ y $d'$ en longitudes de onda.

La longitud del sintonizador la calculamos de forma análoga moviéndonos desde el punto C, que representa la admitancia infinita asociada a un cortocircuito, hasta encontrar los puntos $A$ o $A'$ de admitancias $Y_2 = -jb$ e $Y_2' = +jb$ respectivamente.

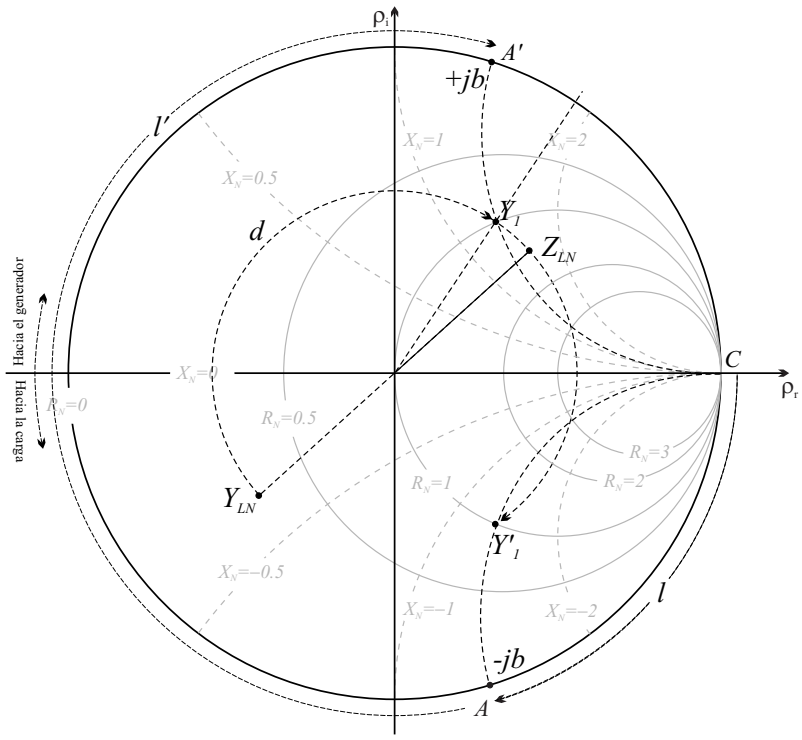



Figura 6.12. Adaptación de impedancias mediante un sintonizador simple

De esta forma la suma de las admitancias en el punto de conexión del sintonizador produce una admitancia total dada por

$$Y_o = Y_1 + Y_2 = (1 + jb) - jb = 1$$

o bien

$$Y_o = Y_1' + Y_2' = (1 - jb) + jb = 1$$

es decir, una admitancia normalizada igual a la unidad, con lo cual logramos que en ese punto la línea esté adaptada.

Como hemos podido comprobar, existen dos parejas de valores para la distancia de colocación del sintonizador y la longitud de este, $(d, l)$ y$(d', l')$, mediante las cuales se consigue adaptar la carga.

### Ejercicio de autoevaluación 6.6

Se quiere adaptar una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 100\,\Omega$ que termina en una impedancia de carga $Z_L = 50 - j100$ mediante un sintonizador en cortocircuito. Determine la posición en que hay que colocar el sintonizador y la longitud del mismo.

### Solución

En primer lugar determinamos la impedancia de carga normalizada

$$Z_{LN} = 0{,}5 - j$$

y la localizamos sobre la carta, véase la figura 6.13. El punto simétrico respecto del origen suministra la admitancia de carga, que es

$$Y_{LN} = 0{,}4 + j0{,}8$$

y a la que corresponde un azimut $\theta_L = 0{,}112\lambda$. A continuación nos desplazamos hacia el generador hasta intersectar la circunferencia $g = 1$ en los dos puntos posibles

$$Y_1 = 1 + j1{,}6 \quad \text{con} \quad \theta_1 = 0{,}178\lambda$$

y

$$Y_1' = 1 - j1{,}6 \quad \text{con} \quad \theta_1' = 0{,}322\lambda$$

De esta manera, determinamos las dos posibles posiciones del sintonizador

$$d = \theta_1 - \theta_L = 0{,}178\lambda - 0{,}112\lambda = 0{,}066\lambda$$

y

$$d' = \theta_1' - \theta_L = 0{,}321\lambda - 0{,}112\lambda = 0{,}209\lambda$$

Para calcular la longitud de los sintonizadores procedemos de la siguiente forma: desde el punto $C$ correspondiente a admitancia infinita, nos desplazamos hacia el generador hasta el punto de admitancia $Y_2 = -j1{,}6$. El azimut correspondiente a esta admitancia proporciona la longitud $l$ del sintonizador que hay que colocar a la distancia $d$ de la carga. En nuestro caso

$$l = 0{,}089\lambda$$

Si continuamos moviéndonos hacia el generador hasta el punto de admitancia $Y_2' = j1{,}6$, obtendremos la longitud $l'$ del sintonizador que hay que colocar a la distancia $d'$ de la carga.

$$l' = 0{,}411\lambda$$

En resumen, para adaptar la línea tenemos dos posibles soluciones

$$d = 0{,}066\lambda \qquad \text{y} \qquad l = 0{,}089\lambda$$

y

$$d' = 0{,}209\lambda \qquad \text{y} \qquad l' = 0{,}411\lambda$$

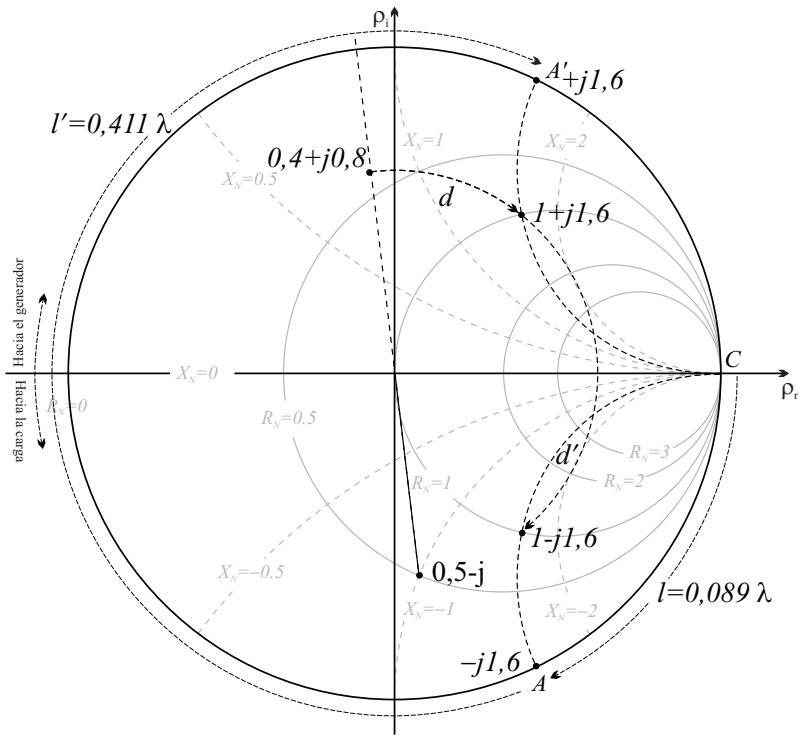



Figura 6.13. Adaptación de la impedancia $Z_{LN} = 0{,}5 - j$ mediante un sintonizador simple

## 8.2. Adaptación de impedancias mediante un doble sintonizador

Como indica la figura 6.14 en este caso se trata de lograr la adaptación por medio de dos secciones de línea cortocircuitada situadas a una distancia $d$ y $d+D$ fijas. Las variables a encontrar en este caso son $l_1$ y $l_2$, las longitudes de los sintonizadores.

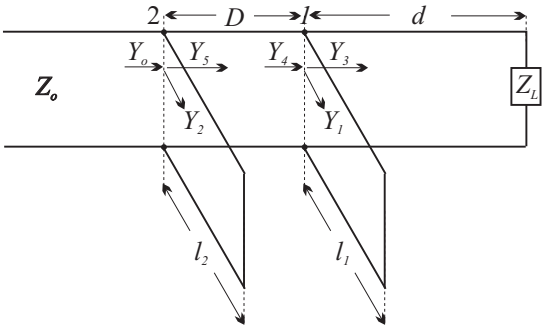



Figura 6.14. Adaptación mediante doble sintonizador

Las admitancias de los sintonizadores en el punto de conexión con la línea serán

$$Y_1 = jb_1 \qquad \text{e} \qquad Y_2 = jb_2$$

El primer paso es tralsadar la admitancia de la carga, $Y_{LN}$, la distancia $d$ hacia el generador obteniendo la admitancia que designamos por $Y_3 = g_3 + jb_3$.

La adición del primer sintonizador transforma esta admitancia en otra

$$Y_4 = Y_3 + Y_1 = g_4 + jb_4 = g_3 + jb_3 + jb_1$$

que se encontrará en la circunferencia $G_N = g_4$. Tendremos que elegir una admitancia $Y_4$ tal que al girar la distancia $D$ caiga sobre la circunferencia $G_N = 1$, teniendo entonces en el punto 2 de la línea una admitancia de la forma

$$Y_5 = 1 + jb_5$$

La longitud del segundo sintonizador de admitancia $Y_2$ debe ser tal que la suma produzca la admitancia $Y_o = 1$ logrando así la adaptación.

El problema radica en encontrar la admitancia $Y_4$ adecuada. El procedimiento que se sigue, indicado en la figura 6.15, consiste en girar la circunferencia $G_N = 1$

en sentido antihorario, es decir hacia la carga, una distancia igual a $D$ para obtener la circunferencia identificada en la figura como $G'_N = 1$. La intersección de esta circunferencia girada con la circunferencia $G_N = g_4$ nos proporciona los puntoa A y B que son posibles soluciones para $Y_4$. Deshaciendo el giro obtenemos los puntos $A'$ y $B'$ que son las soluciones correspondientes a $Y_5$. Esto nos permite conocer las admitancias de los sintonizadores $jb_1$ y $jb_2$ y hallar sus longitudes de forma análoga a como se hace en el caso de un sintonizador simple.

Es importante destacar que todas las admitancias que caigan dentro del círculo sombreado (es el círculo tangente al resultante de trasladar la circunferencia $G_N = 1$) no pueden adaptarse. Sería entonces necesario modificar la distancia $D$.

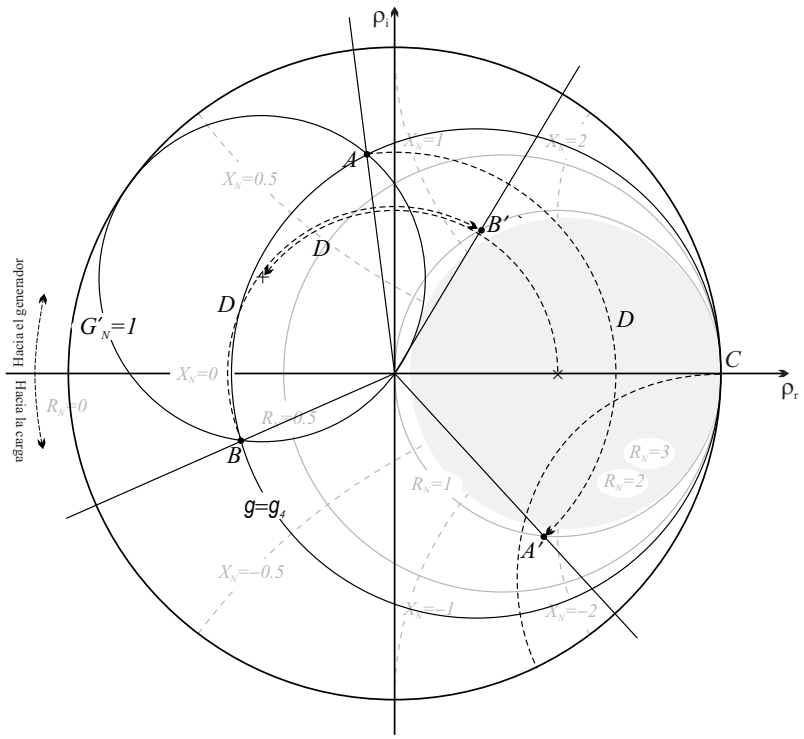



Figura 6.15. Adaptación mediante doble sintonizador

### Ejercicio de autoevaluación 6.7

Se dispone de un doble sintonizador con $D = \lambda/8$ de cortocircuitos móviles para adaptar una carga $Z_L = 50 + j100\,\Omega$, situado a una distancia $d = \lambda/8$ en una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 100\,\Omega$. Encontrar las longitudes más cortas $l_1$ y $l_2$ de los sintonizadores para lograr acoplo perfecto.

### Solución

Las operaciones en la carta de Smith se muestran en la figura 6.16. En primer lugar, giramos hacia la carga (sentido antihorario) el círculo $G_N = 1$ una distancia igual a la separación entre los sintonizadores, $D$. A continuación, representamos la impedancia normalizada en la carta de Smith

$$Z_{LN} = 0{,}5 + j$$

y determinamos la admitancia correspondiente (que es el punto simétrico respecto del origen)

$$Y_{LN} = 0{,}4 - j0{,}8 \qquad \text{con} \qquad \theta_L = 0{,}385\lambda$$

Después trasladamos hacia el generador (sentido horario) $Y_{LN}$ una distancia $d = 0{,}125\lambda$ y obtenemos la admitancia $Y_3$

$$Y_3 = 0{,}23 + j0{,}06 \qquad \text{con} \qquad \theta_3 = 0{,}010\lambda$$

Puesto que la conductancia de $Y_3$ es $g = 0{,}23$, la intersección de la circunferencia de conductancia constante $G_N = 0{,}23$ con el círculo previamente girado, $G'_N = 1$, nos proporciona los posibles valores de $Y_4$

$$Y'_4 = 0{,}23 + j0{,}36$$

$$Y''_4 = 0{,}23 + j1{,}62$$

Ahora bien, $Y_4$ es el resultado de sumar $Y_3$ con la admitancia del primer sintonizador, así pues, tendremos dos posibles valores para dicha admitancia

$$Y_4' = Y_3 + jb_1' \quad \Rightarrow \quad jb_1' = Y_4' - Y_3 = j0{,}30$$

$$Y_4'' = Y_3 + jb_1'' \quad \Rightarrow \quad jb_1'' = Y_4'' - Y_3 = j1{,}56$$

Situando estas admitancias en la carta de Smith podemos obtener las posibles longitues para el primer sintonizador desplazándonos hacia el generador desde el punto $C$ de admitancia infinita hasta el punto donde se sitúan estos valores.

$$l_1' = 0{,}296\lambda$$
$$l_1'' = 0{,}409\lambda$$

Seguidamente, volvemos a trasladar hacia el generador las admitancias $Y_4'$ e $Y_4''$ una distancia igual a la separación $D$ entre los sintonizadores y, al hacer esto caeremos sobre la circunferencia $G_N = 1$. Los dos puntos de intersección nos proporcionan dos posibles valores para $Y_5$ y por tanto, dos posibles valores para la admitancia del segundo sintonizador

$$Y_5' = 1 + j1{,}8 \quad \Rightarrow \quad jb_2' = -j1{,}8$$

$$Y_5'' = 1 - j3{,}6 \quad \Rightarrow \quad jb_2'' = j3{,}6$$

Y las longitudes respectivas son

$$l_2' = 0{,}081\lambda$$

$$l_2'' = 0{,}457\lambda$$

En resumen, las dos posibilidades de adaptar la carga dada con el doble sintonizador son

$$\text{Adaptación 1} \begin{cases} l_1' = 0{,}296\lambda \\ l_2' = 0{,}081\lambda \end{cases}$$

y

$$\text{Adaptación 2} \begin{cases} l_1'' &= 0{,}409\lambda \\ \\ l_2'' &= 0{,}457\lambda \end{cases}$$

y las longitudes más cortas corresponden a la primera opción.

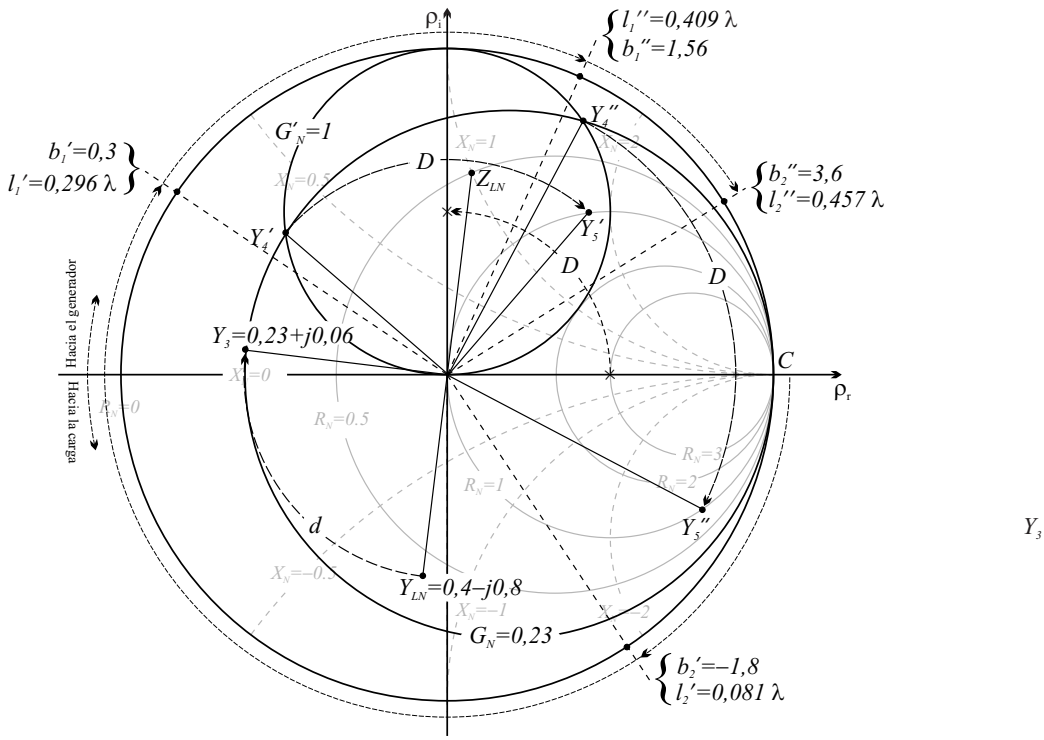



Figura 6.16. Adaptación de la impedancia $Z_{NL} = 0{,}5 + j$ mediante un doble sintonizador con separación $D = 0{,}125\lambda$

## 9. TRATAMIENTO DE LAS LÍNEAS CON PÉRDIDAS

En la práctica todas las líneas tienen pérdidas, si bien frecuentemente dichas pérdidas son muy pequeñas y todo lo estudiado para líneas ideales sigue siendo útil. Formalmente las pérdidas se reflejan en aportar un pequeño término imagina-

rio a la impedancia característica que normalmente puede despreciarse y también añaden un término imaginario a la constante de propagación $\kappa$

$$\kappa = \beta - j\alpha$$

que es, como ya sabemos, la constante de atenuación y que no puede despreciarse por muy pequeño que sea ya que cuando trabajamos con tramos de línea suficientemente largos el efecto de la atenuación es exponencial. Sin embargo, en el caso de pérdidas pequeñas los dos términos de la constante de propagación se pueden aproximar, en términos de los parámetros de la línea, por las siguientes expresiones

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\sqrt{LC}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)$$

y la influencia de la constante de atenuación $\alpha$ puede verse en la expresión del voltaje a lo largo de la línea

$$\widehat{V}(z) \quad = \quad V_o^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_o^- e^{\alpha z} e^{j\beta z}$$

Como ya vimos, la expresión del coeficiente de reflexión en el caso general resulta ser

$$\widehat{\rho} = \frac{V_o^-}{V_o^+} e^{-2\alpha l} e^{-2j\beta l}$$

es decir, a diferencia del caso sin pérdidas, el módulo del coeficiente de reflexión no permanece constante al movernos a lo largo de la línea, sino que decrece según $e^{-2\alpha l}$ a medida que nos alejamos de la carga.

En la figura 6.17 se muestra un esquema típico de onda estacionaria en una línea de pérdidas medias. Se observa que a medida que nos alejamos de la carga (se ha puesto un cortocircuito en $l = 0$), la relación máximo a mínimo disminuye y tiende a la unidad si nos alejamos suficientemente de la carga, debido a que los máximos y mínimos son causados por la interferencia de las ondas incidente y reflejada y esta última, a distancias suficientemente alejadas de la carga, es

prácticamente nula debido a su atenuación. En esta situación, si el generador está suficientemente alejado de la carga, el desacoplo oscilador-carga es grande en el sentido de que cualquier variación en la carga no afecta al oscilador.

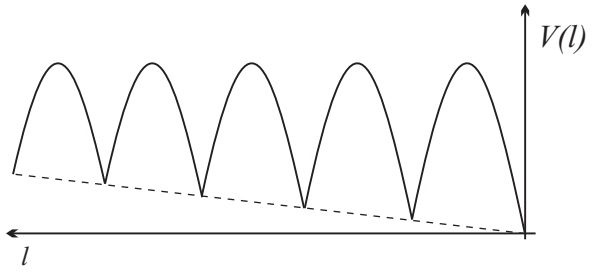



Figura 6.17. Diagrama de onda estacionaria para el voltaje en una línea con pérdidas

En el caso general, la potencia transmitida por una línea viene dada por

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \frac{1}{2}\Re\left(\widehat{V}\cdot\widehat{I}^{*}\right)\\ &= \frac{1}{2}\Re\left\{\left[V_o^{+}e^{-j\beta z}e^{-\alpha z}+V_o^{-}e^{j\beta' z}e^{\alpha z}\right]\right.\\ &\quad\left.\left[\left(V_o^{+}\right)^{*}e^{j\beta z}e^{-\alpha z}-\left(V_o^{-}\right)^{*}e^{-j\beta' z}e^{\alpha z}\right]Y_o^{*}\right\}\end{aligned}$$

Operando, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\langle P\rangle &= \frac{1}{2}\Re\left\{Y_o^{*}\left|V_o^{+}\right|^{2}e^{-2\alpha z}-Y_o^{*}\left|V_o^{-}\right|^{2}e^{2\alpha z}\right\}\\ &+ \frac{1}{2}\Re\left\{Y_o^{*}\left[V_o^{+}\left(V_o^{-}\right)e^{-j2\beta z}-\left(V_o^{+}\right)V_o^{-}e^{j2\beta z}\right]\right\}\end{aligned}$$

Si las pérdidas son muy pequeñas podemos considerar que la admitancia característica de la línea es real, es decir, $Y_o^{*}=Y_o$ y entonces, el segundo sumando es nulo ya que el producto de $Y_o$ por la diferencia de dos complejos conjugados es un número imaginario puro y no tiene parte real. En este caso podemos considerar, igual que en el caso de líneas sin pérdidas, que la potencia promedio transmitida es igual a la diferencia de las potencias promedio asociadas a las ondas incidente y reflejada.

$$\langle P\rangle=\frac{1}{2}Y_o\left|V_o^{+}\right|^{2}e^{-2\alpha z}\left[1-\rho^{2}\right] \tag{6.54}$$

Si, por el contrario, las pérdidas son apreciables, podemos desglosar la admitancia característica en sus componentes real e imaginaria, $Y_o = G_o + jB_o$, y operando adecuadamente obtenemos la siguiente expresión para la potencia promedio transmitida

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} G_o \left| V_o^+ \right|^2 e^{-2\alpha z} \left[ 1 - \rho^2 + 2 \frac{B_o}{G_o} \Im \left( \widehat{\rho}^* \right) \right] \tag{6.55}$$

donde el último término representa un intercambio de energía entre las ondas incidente y reflejada y aparece debido exclusivamente a las pérdidas.

La carta de Smith sigue siendo útil en el caso de líneas con pérdidas, sobre todo si estas son pequeñas. Sin embargo, la representación de $\widehat{\rho}$ ya no será una circunferencia, sino que decrecerá siguiendo una espiral, a medida que nos alejamos de la carga. Precisamente este decremento puede utilizarse en la medida de $\alpha$ mediante la determinación de la razón de onda estacionaria $S$ en puntos distantes de la línea.

Frecuentemente las líneas tienen pérdidas, pero éstas son pequeñas de manera que a las frecuencias de operación las cantidades $(R/\omega L)$ y $(G/\omega C)$ son muy inferiores a la unidad. En esta situación, la impedancia característica de la línea se puede expresar en la forma

$$Z_o \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\left[ 1 - jR/(2\omega L) \right]^{1/2}}{\left[ 1 - jG/(2\omega C) \right]^{1/2}}$$

Si desarrollamos el numerador y el denominador de esta expresión, nos quedamos con los dos primeros términos de cada desarrollo y racionalizamos, obtenemos

$$Z_o \approx R_o \left( \left[ 1 + \frac{RG}{4\omega^2 LC} \right] + j \left[ \frac{G}{2\omega C} - \frac{R}{2\omega L} \right] \right)$$

De este resultado se desprende que las pérdidas, cuando son pequeñas, dan lugar a un término adicional de segundo orden en la parte real de $Z_o$ y traen consigo la aparición de una componente imaginaria de primer orden. Frecuentemente, en transmisiones a larga distancia, por cables submarinos, etc., la componente de pérdidas asociada a la conductividad finita del cable, $R/\omega L$, es superior a la componente de pérdidas debida a la conductancia del dieléctrico, $G/\omega C$. En estas circunstancias y en un margen adecuado de frecuencias puede lograrse la cancelación del término imaginario en la expresión de $Z_o$ si se eleva adecuadamente el valor de $L$ de forma que se verifique la igualdad

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

Este objetivo se puede lograr, por ejemplo, colocando regularmente a distancias apropiadas, autoinducciones en serie en los dos conductores de la línea. Este procedimiento se denomina **pupinización** de la línea.

El interés del procedimiento citado queda claro si se observa su repercusión en la constante de propagación. Si recordamos la definición de la constante de propagación en términos de los parámetros de la línea,

$$\kappa^2 = -\left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right) = \omega^2 LC\left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)\left(1 - j\frac{G}{\omega C}\right)$$

y aplicamos la condición expresada arriba, tenemos un cuadrado perfecto, con lo cual resulta,

$$\kappa = \omega\sqrt{LC}\left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)$$

Desdoblando $\kappa$ en sus componentes real e imaginaria

$$\kappa = \beta - j\alpha$$

se obtienen los siguientes valores para ambas componentes

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha = \sqrt{RG}$$

En estas condiciones, la velocidad de fase del voltaje que se propaga en la línea viene dada por

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Es decir, tanto la velocidad de fase como $\alpha$ van a ser constantes en el rango de frecuencias deseado, lo cual hace que la línea sea prácticamente equivalente a una línea ideal no dispersiva ya que no introduce ni distorsión de fase ni de amplitudes, aspecto de enorme interés a efectos de transmisión de información.

## 10. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 6.1** En una línea de transmisión sin pérdidas de $Z_o = 100\Omega$ se propaga una onda incidente de amplitud $V^+ = 5$ V y $\lambda = 3$ cm, pudiéndose producir, por reflexión según la carga $Z_L$, ondas estacionarias.

a) Represente gráficamente las amplitudes del voltaje y de la corriente en los 6 cm finales de la línea para una carga $Z_L = 100\Omega$. Señale bien las escalas en los ejes de coordenadas e indique la razón de onda estacionaria correspondiente, $S$. Repita lo mismo para las seis cargas siguientes: cortocircuito, circuito abierto, $200\,\Omega$, $50\,\Omega$, $j100\,\Omega$ y $(80 + j60)\Omega$

b) Cuál podría ser la realización práctica de las dos últimas, utilizando por ejemplo, trozos sobrantes de la misma línea?

c) Marque en la carta de Smith los puntos exactos que corresponden a las seis cargas anteriores, indicando el coeficiente de reflexión (módulo y fase)

**E 6.2** Se desea adaptar una carga $Z_L = (800+j300)\Omega$ en una línea de transmisión de $Z_o = 400\Omega$ que transmite una señal de longitud de onda $\lambda = 1,5$ m con un sintonizador de cortocircuito. Determinar las longitudes $l$ del sintonizador y las correspondientes separaciones $d$ de la carga que hacen posible el acoplo.

**E 6.3** Una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 50\Omega$ se carga con una impedancia desconocida $Z_L$. Mediante un doble sintonizador de cortocircuitos móviles se logra una adaptación perfecta cuando las longitudes de los sintonizadores son $l_1 = 0,114\lambda$ y $l_2 = 0,414\lambda$. La separación entre los mismos es $D = 0,375\lambda$ y la carga se encuentra a una distancia $d = 0,2\lambda$ del doble sintonizador. a) Determinar el valor de la impedancia de carga. b)Determinar si existe otro par de valores para $l_1$ y $l_2$ con lo que se logre el acoplo.

**E 6.4** Se desea adaptar una carga $Z_L = (300 + j200)\ \Omega$ a una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 200\,\Omega$ que transmite una señal de longitud de onda $\lambda = 1,5$ m, con un trozo de línea cortocircuitada de impedancia característica $Z'_o = 100\,\Omega$ en paralelo. Determinar la distancia a la que hay que colocar el sintonizador de la carga y su longitud $l$. Determinar si hay más de un conjunto de valores posible.

**E 6.5** Determine si es posible acoplar la admitancia normalizada $Y_L = 3+j2$ con un doble sintonizador de cortocircuitos móviles, en el que la separación entre los sintonizadores es de $3\lambda/8$,. ¿Hay acaso una región de admitancias normalizadas que son inadaptables con este sintonizador? Justifique en el diagrama de Smith sus respuestas y señale, en su caso, la región de imposiblidad de acoplamiento.

**E 6.6** A una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica $\mathrm{Z}_o = 100\Omega$ conectamos en dos experimentos sucesivos, las dos impedancias de carga $\mathrm{Z}_L$ siguientes:

a) Una sección de la misma línea de longitud $\lambda/8$ terminada en cortocircuito.

b) Una sección de la misma línea de longitud $\lambda/8$ terminada en una resistencia de $200\,\Omega$.

Represente estas impedancias de carga en la carta de Smith y determine en cada caso $Z_L$, la razón de onda estacionaria, el coeficiente de reflexión y la posición del primer mínimo de voltaje (desde la carga).

**E 6.7** En la posición $A$ de la línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica $\mathrm{Z}_o = 100\Omega$ que se muestra en la figura E6.7 la medida del coeficiente de reflexión de voltaje es $\rho = 1/3\angle -90^o$. A la derecha del punto $A$ hay una sección $\lambda/8$ en cuyo extremo una impedancia $\mathrm{Z}_L$ cierra la línea. a) Utilizando únicamente el diagrama de Smith determine el valor de $\mathrm{Z}_L$ y de la razón de onda estacionaria $S$; b) Dibuje el perfil de onda estacionaria para el voltaje en la línea, señalando con exactitud las escalas; c) Halle el valor de la impedancia $\mathrm{Z}_A$ que se mide en el punto $A$.

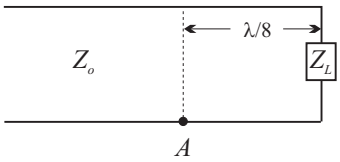



Figura E6.7

**E 6.8** En el extremo de una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 100\Omega$ se coloca una carga $\mathrm{Z}_1$ que produce en la línea la distribución de voltaje (perfil de onda estacionaria) representada en la figura E6.8$a$, con un coeficiente de onda estacionaria $S = 2$, estando el mínimo a la distancia $\lambda/2$ del extremo. Con la ayuda de la carta de Smith determine el valor de la carga $Z_1$. Si a continuación se desconecta esta carga y en su lugar se coloca una sección de línea de longitud $\lambda/8$ seguida de una carga $Z_2$, se obtiene la distribución del voltaje indicada en la figura E6.8$b$ con el mínimo $x_{\text{mín}}$ a $\lambda/8$ del extremo y $S = 2$. Determine el valor de la carga $Z_2$ que da lugar a esta nueva distribución de voltaje.

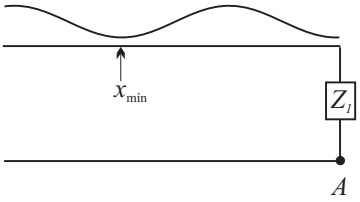



Figura E6.8$a$

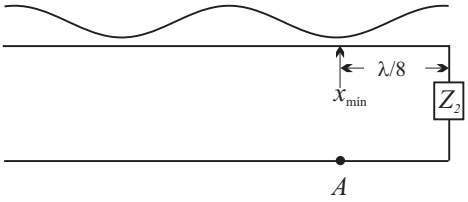



Figura E6.8$b$

**E 6.9** Halle la impedancia de entrada de la línea de transmisión cuyo esquema se muestra en la figura E6.9, en la que se han introducido elementos colocados en serie y que termina con la carga $Z_L = (2{,}5 - j3)Z_o$. Utilice únicamente la carta de Smith.

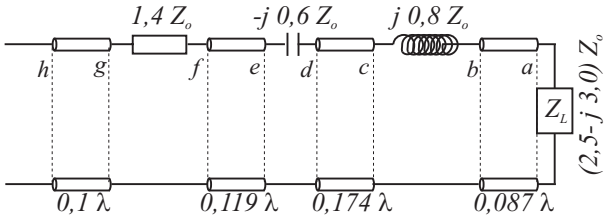



Figura E6.9

**E 6.10** Una línea de transmisión de impedancia característica $Z_o = 20\Omega$ termina en una carga $Z_L = (6 - j8)\ \Omega$. Mediante la carta de Smith encuentre: a) el coeficiente de reflexión de voltaje en la carga; b) la razón de onda estacionaria $S$; c) La distancia a la carga del primer mínimo de voltaje; d) la impedancia de la línea a $0,05\lambda$ de la carga; e) la admitancia de la línea en el mismo punto; f)la posición más cercana a la carga en la que la parte imaginaria de la admitancia de la línea es igual a la admitancia característica.

Tema 7

# PROPAGACIÓN GUIADA: GUÍAS DE ONDAS. CAVIDADES RESONANTES

## RESUMEN

### Objetivos generales

Estudiar los modos de propagación de alto orden, TE y TM en guías de ondas rectangulares y cilíndricas. Estudiar las características más importantes de las cavidades resonantes.

### Objetivos específicos

- Caracterización de los modos de transmisión TE y TM
- Análisis de la propagación en una guía rectangular
- Análisis de la propagación en una guía cilíndrica
- Estudio de la transmisión y de la atenuación de potencia en una guía de ondas
- Análisis de una cavidad resonante rectangular

### Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial. Notación fasorial.

## INTRODUCCIÓN

El propósito de este tema es estudiar las soluciones al problema de propagación en los sistemas de transmisión de alto orden, las guías de ondas. En el rango del espectro visible, la señal viaja a lo largo de una fibra óptica en zig-zag aprovechando el fenómeno de reflexión total interna en la frontera de la fibra. En la guía de ondas el mecanismo de propagación es el mismo, la reflexión interna que tiene lugar en las paredes metálicas de la misma y cuyo resultado es una propagación exitosa a lo largo del tubo que constituye la guía. Veremos que en estos sistemas pueden propagarse los modos de orden alto TE y TM definidos en el tema anterior. Inicialmente nos centraremos en guías sin pérdidas, considerando en la última parte del tema las modificaciones necesarias cuando las paredes que conforman el sistema no son conductores perfectos o el medio con que se rellena la guía no es un dieléctrico perfecto. Finalmente, definiremos la cavidad resonante y estudiaremos sus características principales.

## 1. MODOS DE TRANSMISIÓN TE Y TM

Recordando los resultados genéricos obtenidos en el tema anterior, la componente longitudinal del campo eléctrico de una señal propagante en una guía de ondas según el eje Z, supuesto el medio que llena la guía sin pérdidas, es de la forma

$$\widehat{E}_z(x,y,z) = \widehat{e}_z(x,y)e^{-j\beta z} \tag{7.1}$$

Y la ecuación de ondas se reduce a una ecuación de dos dimensiones que, para el campo eléctrico, viene dada por

$$\left[\nabla_t^2 + k_c^2\right]\widehat{e}_z(x,y) = 0 \tag{7.2}$$

donde $k_c$, denominado **número de onda de corte** por razones que más adelante serán evidentes, verifica la siguiente relación de dispersión

$$k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2 \tag{7.3}$$

Análogamente, la componente longitudinal del campo magnético viene dada por

$$\widehat{H}_z(x,y,z) = \widehat{h}_z(x,y)e^{-j\beta z} \tag{7.4}$$

por lo que la ecuación de ondas se reduce a una ecuación de dos dimensiones que para el campo magnético viene dada por

$$\left[\nabla_t^2 + k_c^2\right]\widehat{h}_z(x,y) = 0 \tag{7.5}$$

Cada una de estas ecuaciones de ondas junto con las condiciones de contorno de nuestro sistema, constituyen un problema de autovalores. La presencia de contornos (los conductores que constituyen la línea de transmisión) da lugar a una discretización del espectro de autovalores $k_{c,n}$ y las autofunciones correspondientes son las distribuciones de campo para la componente longitudinal ($\widehat{e}_z^n$ o $\widehat{h}_z^n$) asociadas a cada autovalor. Los posibles valores de $k_c$ vendrán determinados por la geometría del sistema de transmisión (guía rectangular, cilíndrica, etc.). La obtención de los autovalores permite calcular a su vez la constante de propagación correspondiente a cada modo a través de la relación de dispersión dada por (7.3). Para un determinado autovalor, la constante de propagación viene dada por.

$$\beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - k_{c,n}^2$$

No podemos obtener expresiones concretas para las distribuciones de campo electromagnético de los diversos modos sin antes especificar la geometría del sistema de transmisión. Sin embargo, sí podemos encontrar slgunas propiedades de índole general para los diferentes tipos de modos. A continuación vamos a particularizar las expresiones generales de los campos obtenidas en el tema anterior para los modos TE y TM.

### 1.1. Modo Transversal Eléctrico TE

Estos modos se caracterizan porque la componente longitudinal del campo eléctrico es nula ($\widehat{E}_z = 0$). También se denominan **modos H.** Si imponemos esta condición en las ecuaciones (6.11) y (6.12) que ligan las componentes transversales con las longitudinales, obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_t &= -\frac{j\beta}{k_c^2}\nabla_t \widehat{H}_z \\ \widehat{\mathbf{E}}_t &= -\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{k}{\beta}\mathbf{u}_z \times \widehat{\mathbf{H}}_t \end{aligned} \tag{7.6}$$

De esta forma, los modos TE estarán resueltos en cuanto obtengamos la componente $H_z$ ya que que a partir de dicha componente y mediante las expresiones (7.6) podemos obtener primero la componente transversal del campo magnético $\widehat{\mathbf{H}}_t$ y a partir de ésta, la componente transversal del campo eléctrico $\widehat{\mathbf{E}}_t$.

Además, de las expresiones (7.6) se deduce que las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético son siempre perpendiculares entre sí y forman con $\mathbf{u}_z$ un triedro directo tal como corresponde al sentido de propagación de la energía. Las amplitudes de los campos transversales están relacionados entre sí por la **impedancia de onda TE**

$$Z_{TE} = \frac{\widehat{E}_t}{\widehat{H}_t} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{k}{\beta} \tag{7.7}$$

Por otro lado, sabemos que en los contornos metálicos de la guía, el campo magnético ha de ser tangencial. Si consideramos una geometría genérica como la representada en la figura 6.2 vemos que $\widehat{H}_z$ es de por sí tangencial al contorno metálico, por lo que la condición expuesta afectará básicamente a la componente transversal, $\widehat{\mathbf{H}}_t$. Esta condición, teniendo en cuenta las direcciones mostradas en la figura 6.2, se expresa matemáticamente como sigue

$$\widehat{\mathbf{H}}_t = -\frac{j\beta}{k_c^2}\left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial n}\mathbf{u}_n + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial l}\mathbf{u}_l\right)$$

donde $\mathbf{u}_n$ indica la dirección normal al contorno y $\mathbf{u}_l$ la dirección sobre el contorno. Entonces, la condición de que el campo magnético sea tangencial se traduce en que el primer sumando de esta expresión debe ser nulo, esto es

$$\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial n} = 0 \tag{7.8}$$

sobre las paredes metálicas del sistema. De la relación entre el campo eléctrico y el campo magnético transversal, se verifica automáticamente que el campo eléctrico es perpendicular al contorno.

## 1.2. Modo Transversal Magnético TM

Estos modos se caracterizan porque la componente longitudinal del campo magnético es nula ($\widehat{H}_z = 0$). También se denominan **modos E**. De la misma forma que hicimos en el apartado anterior, si imponemos esta condición en las ecuaciones (6.11) y (6.12) que ligan las componentes transversales con las longitudinales,

obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_t &= -\frac{j\beta}{k_c^2}\nabla_t \widehat{E}_z \\ \widehat{\mathbf{H}}_t &= -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\mathbf{u}_z \times \nabla_t \widehat{E}_z = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{k}{\beta}\mathbf{u}_z \times \widehat{\mathbf{E}}_t \end{aligned} \tag{7.9}$$

Como era de esperar, también se verifica que los campos transversales eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y forman un triedro directo con la dirección de propagación $\mathbf{u}_z$. En este caso, la relación entre las amplitudes de las componentes transversales de los campos viene dada por

$$Z_{TM} = \frac{\widehat{E}_t}{\widehat{H}_t} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{\beta}{k} \tag{7.10}$$

que es **la impedancia de onda TM**

En este caso, la determinación completa del campo se efectúa en términos de $E_z$, que a su vez, debe ser solución de la ecuación (7.2) y verificar la condición de que

$$\widehat{E}_z = 0 \tag{7.11}$$

sobre las paredes metálicas del sistema.

Al imponer esta condición, se verifica automáticamente la condición de que el campo eléctrico es perpendicular sobre el contorno metálico. Efectivamente, con referencia a la figura 6.2, la primera ecuación de (7.9) puede excribirse en la siguiente forma:

$$\widehat{\mathbf{E}}_t = -\frac{j\beta}{k_c^2}\left(\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial n}\mathbf{u}_n + \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial l}\mathbf{u}_l\right)$$

Ahora bien, la condición de que el campo eléctrico sea nulo sobre el contorno nos lleva a que el segundo término de esta expresión debe ser nulo, $\partial \widehat{E}_z/\partial l = 0$. Así, sobre el contorno resultará

$$\widehat{\mathbf{E}}_t = -\frac{j\beta}{k_c^2}\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial n}\mathbf{u}_n$$

siendo por tanto perpendicular a la pared. Teniendo en cuenta la relación entre las componentes transversales, el campo magnético también cumple la condición de ser tangencial a la pared.

## 1.3. Relación de dispersión. Diagrama $\omega - \beta$ para los modos de transmisión

Vamos a analizar la relación de dispersión que han de verificar los modos de transmisión de orden alto, TE y TM. Para un modo determinado, tendremos

$$\beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - k_c^2$$

donde $\beta$ es la constante de propagación en la estructura para el modo en cuestión y $k_c$ es el autovalor correspondiente que viene determinado por la geometría del sistema de transmisión.

Considerando que la propagación se efectúa en un sistema homogéneo y sin pérdidas, lo primero que observamos para modos TE y TM es la existencia de una **frecuencia de corte** determinada por la condición

$$\beta = 0$$

La frecuencia de corte viene determinada por

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} k_c \tag{7.12}$$

o lo que es lo mismo

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} k_c \tag{7.13}$$

Para valores por encima de esta frecuencia, la constante de propagación para dicho modo es real y el modo se propaga sin atenuación. Para valores por debajo, la constante de propagación es imaginaria pura y entonces el modo se atenúa. En este caso decimos que el modo es evanescente.

En función de la frecuencia de corte, la constante de propagación en la guía se puede expresar como

$$\beta = \frac{1}{v_{pho}} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = \frac{\omega}{v_{pho}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

donde $v_{pho}$ es la velocidad de fase que tendría la señal si se propagase en un medio ilimitado.

Podemos definir una longitud de onda en la guía asociada a la constante de propagación y que viene dada por

$$\frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \tag{7.14}$$

con $\lambda = \omega/v_{pho}$ la longitud de onda que tendría la señal si se propagase en un medio ilimitado y $\lambda_c = 2\pi/k_c$ la longitud de onda de corte.

Como hemos comentado, para un valor real de la constante de propagación $\beta$ la onda se propaga por la guía con una velocidad de fase

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v_{pho}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \tag{7.15}$$

con $v_{pho} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ la velocidad de fase que tendría una onda propagándose en un medio sin fronteras. De (7.15) se desprende que la velocidad de fase en la guía es siempre mayor que la correspondiente en el medio ilimitado. Además, $v_{ph}$ depende de la frecuencia, es decir, la guía de ondas se comporta como un medio dispersivo. La velocidad de grupo viene dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Teniendo en cuenta la relación de dispersión, obtenemos la siguiente expresión para la velocidad de grupo

$$v_g = v_{pho}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{7.16}$$

que es siempre menor que la velocidad de fase que tendría la señal en el espacio libre. Es inmediato comprobar que se verifica la relación

$$v_{ph} \cdot v_g = v_{pho}^2$$

Los diagramas de dispersión $\omega - \beta$ para los modos de transmisión en una guía de ondas se obtienen de la representación de la relación de dispersión (7.3). En la la figura 7.1 se muestra dicho diagrama. En ella la recta de pendiente $(\mu\varepsilon)^{-1/2}$ es la correspondiente a propagación libre o de un modo TEM y a esta recta tiende asintóticamente la curva de dispersión para frecuencias mucho mayores que $\omega_c$. Este comportamiento es lógico puesto que cuando la longitud de onda es muy inferior a las dimensiones de la guía, la señal electromagnética *no ve* los contornos de la misma y se propaga como si se tratara de una propagación libre. Cuando las longitudes de onda son comparables con las dimensiones del sistema de transmisión, las características de la propagación se separan fuertemente de las correspondientes a la propagación libre, cesando incluso la propagación para frecuencias inferiores a la de corte.

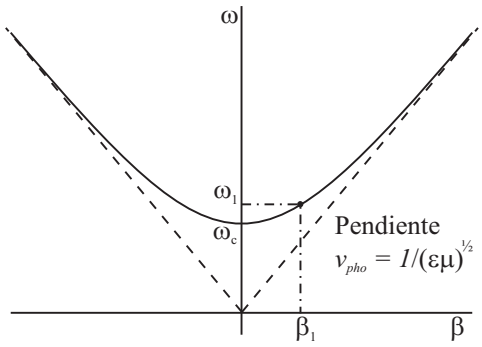



Figura 7.1. Diagrama $\omega - \beta$ para los modos de transmisión

Teniendo en cuenta las definiciones para las velocidades de fase y de grupo, estas magnitudes quedan directamente precisadas en el diagrama $\omega - \beta$ en cuanto se fije el punto de operación (frecuencia de trabajo). En la figura 7.1 se señala, para una frecuencia $\omega_1$ la constante de propagación correspondiente, $\beta_1$. Para este punto de trabajo, la velocidad de fase viene dada por el cociente $\omega_1/\beta_1$ y la velocidad de grupo por la pendiente de la curva en dicho punto. La velocidad de fase, resulta ser, en cualquier caso mayor o igual que la velocidad de propagación en medio ilimitado $v_{pho}$, mientras que la de grupo, que es la que tiene significado a efectos de propagación de energía o información, resulta inferior o, como máximo, igual a $v_{pho}$.

Podemos ver que para frecuencias próximas a la de corte la velocidad de grupo tiende a cero y la de fase a infinito, mientras que a frecuencias mucho mayores que $\omega_c$ ambas velocidades tienden asintóticamente a la velocidad de propagación en el medio libre $v_{pho}$.

## 2. GUIA DE ONDAS RECTANGULAR

En primer lugar escogemos un sistema de coordenadas apropiado, que en este caso es el cartesiano. En la figura 7.2 se esquematiza la geometría de la guía y el sistema de coordenadas. En coordenadas rectangulares las ecuaciones de ondas

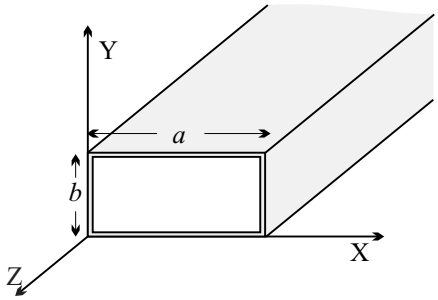



Figura 7.2. Guía de ondas rectangular

que tenemos que resolver son

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)\widehat{e}_z=0 \tag{7.17}$$

y

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)\widehat{h}_z=0 \tag{7.18}$$

para las componentes longitudinales de los campos eléctrico y magnético respectivamente.

Comencemos con la ecuación para el campo eléctrico. Aplicamos el método de separación de variables, esto es

$$\widehat{e}_z(x,y)=\widehat{X}(x)\widehat{Y}(y)$$

Sustituyendo esta expresión y dividiendo posteriormente por $\widehat{e}_z$ resulta:

$$\frac{1}{\widehat{X}}\frac{d^2\widehat{X}}{dx^2}+\frac{1}{\widehat{Y}}\frac{d^2\widehat{Y}}{dy^2}+k_c^2=0$$

Al integrar respecto de x, fijamos $\frac{1}{\widehat{Y}}\frac{d^2\widehat{Y}}{dy^2}$ constante, sea $-k_y^2$, resultando

$$\frac{1}{\widehat{X}}\frac{d^2\widehat{X}}{dx^2}=k_y^2-k_c^2=-k_x^2$$

siendo $k_x$ y $k_y$, constantes de separación, dependientes del modo en cuestión, cuyos valores quedarán determinados por las condiciones de contorno. De la misma

forma se obtiene

$$\frac{1}{\widehat{Y}}\frac{d^2\widehat{Y}}{dy^2} = k_x^2 - k_c^2 = -k_y^2$$

La integración de estas ecuaciones es inmediata, obteniéndose

$$\widehat{e}_z = \left(Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}\right)\left(Ce^{jk_y y} + De^{-jk_y y}\right)$$

Siguiendo un procedimiento completamente análogo obtenemos, para la componente longitudinal del campo magnético, la siguiente expresión

$$\widehat{h}_z = \left(A'e^{jk_x x} + B'e^{-jk_x x}\right)\left(C'e^{jk_y y} + D'e^{-jk_y y}\right)$$

No debemos olvidar que las componentes fasoriales del campo longitudinal $\widehat{E}_z$ y $\widehat{H}_z$ para ondas propagándose según las $z$ crecientes, se obtienen multiplicando las expresiones anteriores por $e^{-j\beta z}$. Para obtener las constantes de integración $A$, $B$, ... tenemos que imponer las condiciones de contorno para los posibles modos de transmisión.

### *Modos TM*

Para estos modos, la componente longitudinal del campo eléctrico en las paredes de la guía debe ser nula. Por tanto, teniendo en cuenta la figura 7.2, tenemos

- Para $x = 0$, $\widehat{e}_z = 0 \ \forall y \Rightarrow A = -B$
- Para $y = 0$, $\widehat{e}_z = 0 \ \forall x \Rightarrow C = -D$

de donde

$$\widehat{e}_z = A\left(e^{jk_x x} - e^{-jk_x x}\right) C\left(e^{jk_y y} - e^{-jk_y y}\right)$$

Los paréntesis anteriores son básicamente funciones seno, de forma que la distribución transversal de la componente $z$ del campo eléctrico queda

$$\widehat{e}_z = E_o \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y)$$

Si aplicamos las condiciones de contorno en el resto de paredes obtendremos los posibles valores de $k_x$ y $k_y$

- Para $x = a$, $\widehat{e}_z = 0 \ \forall y \Rightarrow \operatorname{sen}(k_x x) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}$

- Para $y = b$, $\widehat{e}_z = 0 \ \forall x \Rightarrow \operatorname{sen}(k_y y) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$

siendo $m$ y $n$ números enteros. La distribución transversal de la componente $z$ del campo eléctrico queda

$$\widehat{e}_z^{m,n} = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{7.19}$$

y los autovalores correspondientes vienen dados por

$$k_c^{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{7.20}$$

donde hemos simbolizado el modo con dos subíndices relativos a las dependencias con $x$ e $y$.

El fasor para la componente longitudinal del campo eléctrico en el caso de señales que se propagan en la dirección de las $z$ crecientes será

$$\widehat{E}_z^{m,n} = \widehat{e}_z^{m,n} e^{-j\beta z} = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \tag{7.21}$$

### *Modo TE*

Para el análisis de los modos TE partimos de la expresión general para la componente longitudinal del campo magnético

$$\widehat{h}_z = \left(A' e^{jk_x x} + B' e^{-jk_x x}\right)\left(C' e^{jk_y y} + D' e^{-jk_y y}\right)$$

y aplicamos las condiciones de contorno en las paredes de la guía que en este caso son

$$\frac{\partial \widehat{h}_z}{\partial x} = 0 \qquad ; \qquad x = 0, a$$

$$\frac{\partial \widehat{h}_z}{\partial y} = 0 \qquad ; \qquad y = 0, b$$

Así, para la distribución transversal de la componente longitudinal, $\widehat{h}_z$, obtenemos la siguiente expresión

$$\widehat{h}_z^{mn} = H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{7.22}$$

Y el fasor para la componente longitudinal del campo magnético será

$$\widehat{H}_z^{m,n} = \widehat{h}_z^{m,n} e^{-j\beta z} = H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \tag{7.23}$$

Los autovalores correspondientes a los modos TE vienen determinados también por la expresión (7.20) lo que significa que los modos $\mathrm{TE}_{mn}$ y $\mathrm{TM}_{mn}$ correspondientes a un mismo par de subíndices $(m, n)$ son degenerados y tienen la misma constante de propagación dada por la relación de dispersión

$$\beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \tag{7.24}$$

De las expresiones (7.19) y (7.22) se deduce fácilmente que los subíndices $m$ y $n$ no pueden ser nulos para los modos TM mientras que en el caso de los modos TE, $m$ y $n$ no pueden ser nulos simultáneamente. Otra característica importante, que no demostraremos aquí, es que los modos TE y TM forman un conjunto completo, lo cual significa que cualquier distribución de campo electromagnético en una guía de ondas rectangular se puede desarrollar en términos de estos modos.

El valor de las amplitudes de los campos, que hemos representado por $E_o$ y $H_o$, dependerá en general de la potencia de excitación del modo analizado.

Una vez obtenidas las componentes longitudinales, las restantes pueden obtenerse a partir de ellas por derivaciones simples mediante las relaciones (7.6) y (7.9).

- **Para los modos TM** ($H_z = 0$) tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_x^{mn} &= -j\frac{\beta}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\
\widehat{E}_y^{mn} &= -j\frac{\beta}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\
\widehat{H}_x^{mn} &= \frac{j\omega\varepsilon}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\
\widehat{H}_y^{mn} &= -\frac{j\omega\varepsilon}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

- **Para los modos TE** ($E_z = 0$) tendremos

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_x^{mn} &= j\frac{\beta}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\
\widehat{H}_y^{mn} &= j\frac{\beta}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\
\widehat{E}_x^{mn} &= \frac{j\omega\mu}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \\
\widehat{E}_y^{mn} &= -\frac{j\omega\mu}{(k_c^{mn})^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_o \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

De acuerdo con estos resultados, una guía rectangular con sección transversal $a\times b$ puede soportar la propagación de ondas con muchas configuraciones de campo diferentes, pero cuantizadas. La exponencial $e^{-j\beta}$ describe una onda que viaja en la dirección $+z$, pero sólo si $\beta$ es real, lo que exige que $k > k_c$. En caso contrario, tendríamos una onda evanescente cuya amplitud decae exponencialmente.

A cada modo le corresponde una frecuencia de corte para la cual $\beta = 0$ y que viene dada por la ecuación (7.13) una vez sustituida $k_c^{mn}$ por su expresión para la guía rectangular

$$f_c^{mn} = \frac{v_{pho}}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{7.27}$$

donde $v_{pho} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ es la velocidad de una onda plana en un medio sin fronteras con parámetros constitutivos $\varepsilon$ y $\mu$.

### 2.1. Análisis del modo fundamental

El modo con la frecuencia de corte más baja se denomina **modo fundamental** o **dominante**. La utilización de una guía de ondas en una forma arbitraria puede dar lugar a que se propaguen por ella multitud de modos con lo cual el análisis del campo en la guía es difícil y las aplicaciones de los sistemas son muy limitadas. La forma usual de operación de una guía es con un solo modo propagándose a su través y esto es posible únicamente en el rango de frecuencias comprendido entre la frecuencia de corte del modo fundamental y la del primer modo superior.

En una guía rectangular el modo fundamental es de tipo TE, dado que sólo para los modos TE pueden obtenerse modos con $m$ o $n$ nulos. Si la guía tuviera sección cuadrada, $a = b$, todos los modos subindicados por $(m, n)$ y $(n, m)$ serían degenerados y en particular, los modos $TE_{10}$ y $TE_{01}$ tendrían la misma frecuencia de corte y ambos serían modos dominantes. Esta es la razón fundamental para que se utilicen guías de sección rectangular. En estas guías la notación más frecuentemente utilizada corresponde a la elección del eje X en la dirección del lado más ancho de la guía, tal como se representa en la figura 7.2. De esta forma el modo fundamental, es decir, el de menor frecuencia de corte, es el modo $TE_{10}$. La frecuencia de corte para este modo vendrá dada por

$$(\omega_c)_{10} = v_{pho} k_c^{10} = v_{pho} \frac{\pi}{a} \tag{7.28}$$

Una vez que fijamos el valor de $a$ queda automáticamente determinada la frecuencia de corte del modo fundamental $TE_{10}$ y también la del modo $TE_{20}$ que resulta ser el doble

$$(\omega_c)_{20} = 2\,(\omega_c)_{10}$$

Los restantes modos TE y TM tendrán frecuencias de corte superiores al $TE_{20}$ si el valor de $b$ es inferior a $a/2$. Ahora bien, si reducimos mucho la dimensión $b$ de la guía, como se verá cuando estudiemos la atenuación en guías, se produce un aumento significativo de las pérdidas en la propagación del modo fundamental. Por este motivo, en la práctica se suele escoger $a = 2b$. En la figura 7.3 se muestra un esquema de las frecuencias de corte normalizadas a la frecuencia del modo fundamental para una guía de ondas en la que $a = 2b$

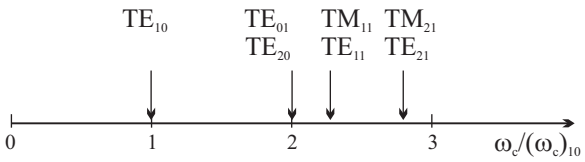



Figura 7.3. Frecuencias de corte normalizadas al modo fundamental para una guía rectangular

Particularizando para $m = 1$, $n = 0$, obtenemos las siguientes expresiones para las componentes del campo del modo fundamental $TE_{10}$:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_z^{10} &= H_o \cos(\frac{\pi}{a}x)\, e^{-j\beta z} \\ \widehat{H}_x^{10} &= j\frac{\beta}{\pi/a} H_o \operatorname{sen}(\frac{\pi}{a}x)\, e^{-j\beta z} \\ \widehat{E}_y^{10} &= -j\frac{\omega\mu}{\pi/a} H_o \operatorname{sen}(\frac{\pi}{a}x)\, e^{-j\beta z} \end{aligned} \tag{7.29}$$

donde podemos observar que el campo eléctrico sólo posee componente según el eje Y y que todas las componentes son independientes de la coordenada $y$.

Al inicio del tema se comentó que el mecanismo de propagación de una señal a lo largo de una guía es similar al de la fibra óptica, la señal viaja en zig-zag aprovechando el fenómeno de reflexión interna total en la paredes metálicas de la guía. Para verlo, vamos a analizar el caso del modo fundamental $\mathrm{TE}_{10}$. El campo eléctrico para este modo viene dado por

$$\widehat{E}_y^{10} = -j\frac{\omega\mu}{\pi/a} H_o \operatorname{sen}(\frac{\pi}{a}x)\, e^{-j\beta z}$$

expresando la función seno como suma de exponenciales

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{a}x) = \frac{e^{j\frac{\pi}{a}x} - e^{-j\frac{\pi}{a}x}}{2j}$$

y sustituyendo, obtenemos

$$\widehat{E}_y^{10} = -\frac{\omega\mu}{2\pi/a} H_o \left(e^{j\frac{\pi}{a}x} - e^{-j\frac{\pi}{a}x}\right) e^{-j\beta z}$$

que podemos expresar como

$$\widehat{E}_y^{10} = \frac{\omega\mu a}{2\pi} H_o \left(e^{-j\beta(z+\frac{\pi x}{\beta a})} - e^{-j\beta(z-\frac{\pi x}{\beta a})}\right)$$

Si definimos

$$z' = z + \frac{\pi x}{\beta a} \qquad y \qquad z'' = z - \frac{\pi x}{\beta a}$$

El campo eléctrico viene dado por

$$\widehat{E}_y^{10} = \frac{\omega\mu a}{2\pi} H_o \left(e^{-j\beta z'} - e^{-j\beta z''}\right)$$

donde el primer término representa una onda plana que se propaga en la dirección $\mathbf{u}_{z'}$, mientras el segundo término representa una onda plana que viaja en la dirección $\mathbf{u}_{z''}$, ambas con una constante de propagación igual a $\beta$. Es decir, podemos considerar que el modo $\mathrm{TE}_{10}$ está formado por la combinación de dos ondas transversales electromagnéticas (TEM) que se propagan en las direcciónes $\mathbf{u}_{z'}$ y $\mathbf{u}_{z''}$.

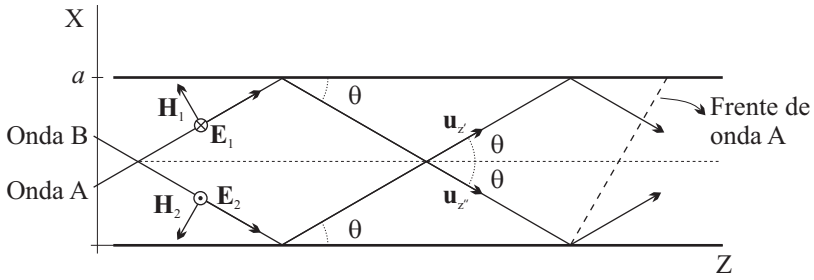



Figura 7.4. Ondas TEM constituyentes del modo $TE_{10}$

Como se desprende de la figura 7.4, la combinación de ambas ondas viaja en la dirección $+z$ zigzagueando entre las paredes opuestas de la guía de ondas. En la figura 7.5 se puede observar la relación entre la velocidad de fase de una de las componentes individuales del modo $\mathrm{TE}_{10}$, la velocidad de fase del grupo formado por las ondas $A$ y $B$ y su velocidad de grupo, que es la velocidad de transmisión de la energía que transporta el modo.

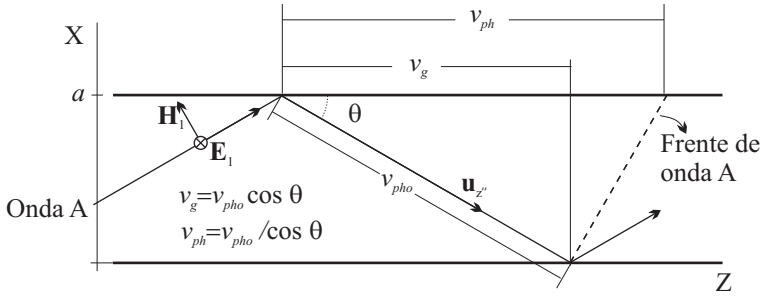



Figura 7.5. Relaciones entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo para el modo $\mathrm{TE}_{10}$

En la práctica las dimensiones de las guías están normalizadas según el rango

de frecuencia de operación en el modo fundamental, siendo las de mayor sección las correspondientes a rangos de frecuencia inferiores y viceversa, según lo ya expuesto. A los rangos de frecuencia que resultan de esta normalización se les denomina bandas, de entre las cuales cabe citar las siguientes:

Banda S: De 2,60 a 3,95 GHz

Banda J: De 5,30 a 8,20 GHz

Banda X: De 8,20 a 12,4 GHz

Banda P: De 12,4 a 18,0 GHz

Banda K: De 18,0 a 26,6 GHz

Banda R:. De 26.5 a 40,0 GHz

Para la banda X, por ejemplo, las dimensiones de una guía estándar son

$$a = 2{,}286 \text{ cm}$$

$$b = 1{,}016 \text{ cm}$$

Las guías de ondas están construidas normalmente de latón. En rangos de frecuencias altas las paredes interiores de las guía se suelen platear para disminuir las pérdidas asociadas a la conductividad finita de las paredes.

**Ejercicio de autoevaluación 7.1**

En una guía de ondas rectangular con dieléctrico aire y dimensión mayor $a = 2,29$ cm, se propaga el modo TM de orden más bajo. La frecuencia de corte de este modo es de 16,1 GHz. Determine los valores de la constante de propagación $\beta$; la longitud de onda en la guía, $\lambda'$, asociada a esta constante de propagación; la velocidad de fase, $v_{ph}$ y la impedancia de onda intrínseca $Z_{TM}$ cuando la guía opera a una frecuencia doble de la frecuencia de corte.

**Solución**

El modo $TM$ de orden más bajo es el $TM_{11}$. A partir de la frecuencia de

corte, calculamos la otra dimensión de la guía

$$f_c = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$$

Sustituyendo y depejando $b$, obtenemos

$$b = 1{,}02 \text{ cm}$$

La frecuencia de operación es el doble de la frecuencia de corte, esto es

$$f = 2f_c = 32{,}2 \text{ GHz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f = 202{,}32 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

y la constante de propagación

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Sustituyendo los datos, obtenemos para la constante de propagación el valor

$$\beta = 584{,}03 \text{ m}^{-1}$$

y la longitud de onda asociada será

$$\lambda' = \frac{2\pi}{\beta} = 1{,}08 \text{ cm}$$

La velocidad de fase es

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = 3{,}46 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

y la impedancia intrínseca

$$Z_{TM_{11}} = Z_o\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

con $Z_o$ la impedancia intrínseca del vacio, $Z_o = 120\pi\,\Omega$. El valor obtenido es

$$Z_{TM_{11}} = 103{,}9\pi\,\Omega$$

## 3. GUÍA DE SECCIÓN CIRCULAR

Esta guía de ondas, comunmente conocida como guía cilíndrica, presenta una geometría como la mostrada en la figura 7.6. El sistema de coordenadas más adecuado para el estudio de esta guía es el cilíndrico $(r, \varphi, z)$. Para esta geometría obtendremos también un conjunto de posibles modos identificados con doble subíndice, correspondiendo el primero a la dependencia con $\varphi$ y el segundo a la dependencia con $r$.

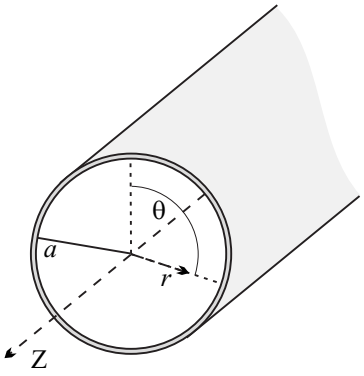



Figura 7.6. Guía de sección circular

Siguiendo un proceso análogo al llevado a cabo en la guía rectangular, la ecuación diferencial de partida para la componente longitudinal del campo eléctrico es, en coordenadas cilíndricas

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_c^2\right)\widehat{e}_z = 0$$

y otra ecuación análoga para $\widehat{h}_z$.

Procedemos de forma completamente análoga a como lo hicimos para la guía rectangular. Aplicamos el método de separación de variables. Considerando

$$\widehat{e}_z(r, \varphi) = \widehat{R}(r)\widehat{F}(\varphi)$$

obtenemos las siguientes ecuaciones de una única variable

$$\frac{1}{\widehat{F}}\frac{d^2\widehat{F}}{d\varphi^2} = -n^2$$

y

$$\frac{d^2\widehat{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\widehat{R}}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)\widehat{R} = 0$$

Para la obtención de la última ecuación hemos hecho el siguiente cambio de variable

$$\rho = k_c r$$

La primera ecuación tiene una integración inmediata y la solución es de la forma

$$\widehat{F} = A_n e^{\pm jn\varphi}$$

Ahora bien, $n$ tiene que ser un número entero dado que los campos tienen que ser continuos en $\varphi$ y $\varphi + 2\pi$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación en $\rho$ es la ecuación de Bessel de orden $n$, cuyas soluciones son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, $J_n(\rho)$ y $N_n(\rho)$. De estos dos conjuntos de soluciones, las funciones de Bessel de segunda especie, $N_n(\rho)$ son singulares en el origen y por este motivo no son soluciones válidas para nuestro problema. Los campos no pueden ser singulares en ningún punto del interior de la guía puesto que no hay fuentes en el interior. Teniendo en cuenta estas condiciones, la solución para la componente longitudinal del campo electrico es de la forma

$$\widehat{e}_{zn} = E_o J_n\left(k_c r\right) e^{jn\varphi} \tag{7.30}$$

y otra similar para $\widehat{h}_z$

Para obetener los valores de $k_{c,n}$ tenemos que imponer las condiciones de contorno para a cada uno de los modos de transmisión TM y TE, de forma similar a como lo hicimos para la guía rectangular.

### *Modos TM*

Para estos modos, la componente longitudinal del campo eléctrico en las paredes de la guía debe ser nula. Por tanto,

$$\widehat{e}_z|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_n\left(k_{c,n}a\right) = 0$$

Ahora bien, las funciones $J_n$ poseen multiplicidad de ceros y esto permite cumplir la condición de contorno en $r = a$. Si llamamos $p_{nm}$ al m-ésimo cero de la

función $J_n$ tendremos que los valores de $k_c^{nm}$ que garantizan el cumplimiento de la condición de contorno son

$$k_c^{nm} = \frac{p_{nm}}{a}$$

y la distribución transversal de la componente longitudinal del campo eléctrico viene dada por

$$\widehat{e}_z^{nm} = E_o \; J_n \left( p_{nm} \frac{r}{a} \right) e^{jn\varphi} \tag{7.31}$$

No olvidemos que la componente longitudinal del campo eléctrico para ondas propagándose según $+z$ viene dada por

$$\widehat{E}_z^{nm} = \widehat{e}_z^{nm}(r,\varphi)\, e^{-j\beta z} = E_o \; J_n \left( p_{nm} \frac{r}{a} \right) e^{jn\varphi} e^{-j\beta z}$$

Los campos transversales se obtienen aplicando las ecuaciones que los relacionan con los longitudinales. Aplicando las relaciones (7.9) para los modos TM obtenemos las siguientes expresiones para las componentes transversales de los fasores de campo

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_r^{nm} &= \frac{j\beta}{(k_c^{nm})^2} E_o \; J_n' e^{jn\varphi} e^{-j\beta z} \\
\widehat{E}_\varphi^{nm} &= \frac{-n\beta}{(k_c^{nm})^2} E_o \frac{1}{r} \; J_n e^{jn\varphi} e^{-j\beta z} \\
\widehat{H}_\varphi^{nm} &= \frac{\widehat{E}_r^{nm}}{Z_{TM}} \\
\widehat{H}_r^{nm} &= -\frac{\widehat{E}_\varphi^{nm}}{Z_{TM}}
\end{aligned}$$

donde

$$J_n' = \frac{\partial J_n}{\partial r}$$

y

$$Z_{TM} = \frac{\beta}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

es la impedancia del modo TM.

### *Modos TE*

Para el análisis de los modos TE partimos de la solución general para la componente longitudinal del campo magnético

$$\widehat{h}_{zn} = H_o J_n \left(k_{c,n} r\right) e^{jn\varphi}$$

y aplicamos la condición de contorno en las paredes de la guía que ahora es

$$\left.\frac{\partial \widehat{h}_z}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

Derivando y particularizando en $r = a$ obtenemos la siguiente condición

$$H_o J_n' \left(k_{c,n} a\right) e^{jn\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_n' \left(k_{c,n} a\right) = 0$$

Ahora bien, igual que las funciones de Bessel, sus derivadas $J_n'$ también poseen multiplicidad de ceros. Si llamamos $p'_{nm}$ al m-ésimo cero de la función $J_n'$ tendremos que los valores de $k_c^{nm}$ que garantizan el cumplimiento de la condición de contorno son

$$k_c^{nm} = \frac{p'_{nm}}{a}$$

y la componente longitudinal del campo eléctrico viene dada por

$$\widehat{h}_z^{nm} = H_o \; J_n \left(p'_{nm} \frac{r}{a}\right) e^{jn\varphi} \tag{7.32}$$

Aplicando las relaciones (7.6) para los modos TE obtenemos las siguientes expresiones para las componentes transversales de los campos

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_r^{nm} &= -\frac{j\beta}{\left(k_c^{nm}\right)^2} H_o \; J_n' e^{jn\varphi} e^{-j\beta z} \\
\widehat{H}_\varphi^{nm} &= \frac{n\beta}{\left(k_c^{nm}\right)^2} H_o \frac{1}{r} \; J_n e^{jn\varphi} e^{-j\beta z} \\
\widehat{E}_\varphi^{nm} &= -Z_{TE} \widehat{H}_r^{nm} \\
\widehat{E}_r^{nm} &= Z_{TE} \widehat{H}_\varphi^{nm}
\end{aligned}$$

donde

$$Z_{TE} = \frac{k}{\beta} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

es la impedancia del modo TE.

| $m\backslash n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,40483 | 3,83171 | 5,13562 | 6,38016 |
| 2 | 5,52008 | 7,01559 | 8,41724 | 9,76102 |
| 3 | 8,65373 | 10,17347 | 11,61984 | 13,01520 |
| 4 | 11,79153 | 13,32369 | 14,79595 | 16,22347 |

**Tabla 7.1. Ceros de la función de Bessel,** $J_n(x)$

| $m\backslash n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,83171 | 1,84118 | 3,05424 | 4,20119 |
| 2 | 7,01559 | 5,33144 | 6,70613 | 8,01524 |
| 3 | 10,17347 | 8,53632 | 9,96947 | 11,34592 |
| 4 | 13,32369 | 11,70600 | 13,17037 | 14,58585 |

**Tabla 7.2. Ceros de la derivada de la función de Bessel,** $J'_n(x)$

## 3.1. Modo fundamental en una guía cilíndrica

En las tablas 7.1 y 7.2 se relacionan los primeros ceros $p_{nm}$ y $p'_{nm}$ de la función de Bessel $J_n$ y su derivada $J'_n$. Podemos observar que el valor de $x$ para el que se obtiene el primer cero es $p'_{11} = 1,84118$ por lo que el modo fundamental en una guía cilíndrica es el $TE_{11}$.

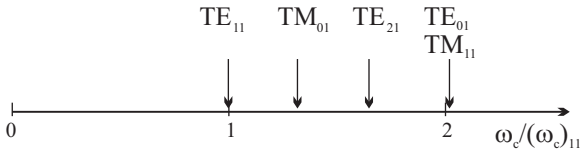



Figura 7.7. Frecuencias de corte normalizadas
al modo fundamental para una guía circular

La frecuencia de corte del modo fundamental viene dada por

$$(\omega_c)_{TE_{11}} = v_{pho} k_c^{11} = v_{pho} \frac{1,841}{a} \tag{7.33}$$

siendo 1,841 aproximadamente el valor de $p'_{11}$. El modo siguiente es el inferior de los TM, es decir, el $TM_{01}$, cuya frecuencia de corte es

$$(\omega_c)_{TM_{01}} = v_{pho} k_c^{01} = v_{pho} \frac{2,405}{a}$$

En la figura 7.7 se representa un esquema de las frecuencias de corte para los primeros modos de la guía cilíndrica. Podemos comprobar que el rango de frecuencias en el que se puede operar únicamente en el modo fundamental es muy reducido y esto constituye la principal dificultad para la utilización de esta guía frente a la rectangular.

A pesar del inconveniente mencionado, los modos $\mathrm{TE}_{0m}$ tienen un gran interés porque carecen de componente $H_\varphi$ y esto da lugar a que las corrientes presentes en las paredes de la guía sean circulares. Esto nos permite, construyendo la guía como asociación de aros metálicos uno a continuación de otro, pero separados eléctricamente o bien fabricando la guía como una hélice metálica, filtrar con facilidad los restantes modos ya que las corrientes longitudinales se cortan y no pueden propagarse. Además, la ausencia de componente $H_\varphi$ da lugar (como veremos más adelante) a que las pérdidas asociadas a la conductividad finita de las paredes disminuyan con la frecuencia y esto es de gran importancia para comunicaciones a larga distancia.

**Ejercicio de autoevaluación 7.2**

Una guía cilíndrica llena de aire tiene un diámetro de 90 mm. Encontrar los modos TE y TM que se transmitirán en la guía si opera a una frecuencia 1.4 veces la frecuencia de corte del modo fundamental. Determinar la longitud de onda y la velocidad de fase de cada modo.

**Solución**

El modo fundamental de una guía cilíndrica es el modo $\mathrm{TE}_{11}$ cuya frecuencia de corte es

$$\omega_{TE_{11}} = v_{pho}\frac{1{,}841}{a}$$

donde $v_{pho} = c$ puesto que la guía está rellena de aire y $a$ es el radio de la guía, $a = 0{,}045$ m. Sustituyendo valores tenemos

$$\omega_{TE_{11}} = 1{,}23 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$$

Entonces, la frecuencia de operación será

$$\omega = 1{,}4\omega_{TE_{11}} = 1{,}72 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$$

Cuando la guía opera en esta frecuencia, transmitirá el modo fundamental. Para determinar si se transmite otro modo superior, tenemos que calcular la frecuencia de corte de los modos siguientes. Consultando las tablas de ceros de la función de Bessel y su derivada, podemos determinar que el modo siguiente al fundamental es el modo $\mathrm{TM}_{01}$ cuya frecuencia de corte viene dada por

$$\omega_{TM_{01}} = v_{pho}\frac{2{,}405}{a}$$

Sustituyendo valores, obtenemos que la frecuencia de corte para este modo es

$$\omega_{TM_{01}} = 1{,}6 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$$

que está por debajo de la frecuencia de operación, por tanto, este modo también se transmitirá.

El siguiente modo es el $\mathrm{TE}_{21}$ cuya frecuencia de corte es

$$\omega_{TM_{01}} = v_{pho}\frac{3{,}054}{a} = 2{,}03 \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$$

que es mayor que la frecuencia de operación, por tanto, este modo no se propagará.

En resumen, vemos que en la guía se propagarán los modos $\mathrm{TE}_{11}$ y $\mathrm{TM}_{01}$. A continuación, a partir de la relación de dispersión, podemos obtener la constante de propagación de cada uno de estos modos

$$\beta_{11} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} = 18{,}55 \text{ m}^{-1}$$

y

$$\beta_{01} = 28{,}78 \text{ m}^{-1}$$

Las longitudes de onda de cada modo en la guía son

$$\lambda'_{11} = \frac{2\pi}{\beta_{11}} = 33{,}87 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\lambda'_{01} = \frac{2\pi}{\beta_{01}} = 21{,}83 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Por último, la velocidad de fase de cada modo viene dada por

$$v_{ph}^{11} = \frac{\omega}{\beta_{11}} = 7{,}23 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

y

$$v_{ph}^{01} = \frac{\omega}{\beta_{11}} = 4{,}69 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Vemos que la velocidad de fase en la guía es mayor que la velocidad de fase en el espacio libre. También observamos que cuanto más alto sea el orden del modo que se propaga, la velocidad de fase en la guía se aproximará a la velocidad de fase en el espacio libre (velocidad de la luz en el caso de propagación en el vacío). Este resultado es lógico ya que para una frecuencia muy alta, la señal *no verá* las fronteras de la guía (la longitud de onda de la señal es muy pequeña comparada con las dimensiones de la guía) y se propagará como si lo hiciera en el espacio libre.

## 4. POTENCIA EN GUÍAS. ATENUACIÓN

Una vez obtenida la distribución del campo electromagnético en una guía, el estudio de la potencia transmitida y la energía almacenada en el sistema se realiza en función de dicho campo. El doble objetivo de este apartado es, primero, expresar la potencia transmitida y la energía almacenada por la guía en términos de las componentes longitudinales del campo. Segundo, considerar guías reales, esto es, con paredes metálicas que no son conductores perfectos y rellenas con medios dieléctricos disipativos, y calcular la atenuación de la señal que se propaga.

La potencia promedio transmitida a través de la sección transversal de la guía viene dada por

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_{S_T}\left(\widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^*\right)\cdot d\mathbf{s}\right\} = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_{S_T}\left(\widehat{\mathbf{E}}_t \times \widehat{\mathbf{H}}_t^*\right)\cdot d\mathbf{s}\right\} \tag{7.34}$$

Si particularizamos para los modos TE, la relación anterior puede expresarse en la forma:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_{S_T} Z_{TE}\left[\left(\widehat{\mathbf{H}}_t \times \mathbf{u}_z\right)\times\left(\widehat{\mathbf{H}}_t\right)^*\right]\cdot \mathbf{u}_z ds\right\}$$

Aplicando la relación vectorial $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ resulta

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\int_{S_T} Z_{TE}\left[\widehat{\mathbf{H}}_t \cdot \left(\widehat{\mathbf{H}}_t\right)^*\right] ds$$

Haciendo uso de la ecuación (7.6) podremos pasar a expresar la potencia en términos de $H_z$:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2} Z_{TE} \frac{\beta^2}{k_c^4} \int_{S_T} \left[\nabla_t H_z \cdot \nabla_t \left(H_z\right)^*\right] ds$$

Para simplificar esta expresión, aplicamos el teorema de Green que viene dado por

$$\int_{S_T} \left(\Psi \nabla_t^2 \Phi - \nabla_t \Psi \cdot \nabla_t \Phi\right) ds = \int_L \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl \tag{7.35}$$

Tomando $\Psi = \Phi = H_z$ obtenemos

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2} Z_{TE} \frac{\beta^2}{k_c^4} \left\{ \int_L H_z \frac{\partial H_z^*}{\partial n} dl - \int_{S_T} H_z \nabla_t^2 H_z^* ds \right\}$$

Si tenemos en cuenta la condición de contorno para $\widehat{H}_z$, el primer término de esta expresión se anula. Finalmente, considerando la ecuación de ondas (7.5), obtenemos para la potencia promedio transmitida por la guía la siguiente expresión

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2} Z_{TE} \frac{\beta^2}{k_c^2} \int H_z H_z^* ds \tag{7.36}$$

Un procedimiento análogo conduce, en el caso de los modos TM, a

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2 Z_{TM}} \frac{\beta^2}{k_c^2} \int E_z E_z^* ds \tag{7.37}$$

De forma totalmente paralela se pueden encontrar las expresiones correspondientes a la energía eléctrica y magnética promedio almacenada en la guía por unidad de longitud.

$$\left\langle W'_H \right\rangle = \frac{1}{4} \int_{S_T} \mu \left(\widehat{\mathbf{H}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^*\right) ds \tag{7.38}$$

$$\left\langle W'_E \right\rangle = \frac{1}{4} \int_{S_T} \varepsilon \left(\widehat{\mathbf{E}} \cdot \widehat{\mathbf{E}}^*\right) ds \tag{7.39}$$

que resultan ser iguales en el caso de modos propagantes. De esta forma, si denominamos $\langle W'\rangle$ a la energía promedio total almacenada, tendremos que $\langle W'\rangle = 2\left\langle W'_E\right\rangle = 2\left\langle W'_H\right\rangle$.

Se puede comprobar, y se deja como ejercicio, que la potencia promedio transmitida y la energía promedio almacenada por unidad de longitud, están relacionadas entre sí a través de la velocidad de grupo

$$\langle P\rangle = \left\langle W'\right\rangle \ v_g \tag{7.40}$$

tal como corresponde a la interpretación de dicha velocidad como la de transporte de la energía.

Para modos evanescentes, es decir, a frecuencias inferiores a las de corte, la energía promedio eléctrica almacenada en la guía no coincide con la magnética, siendo mayor esta última para los modos TE y la eléctrica para los modos TM.

**Ejercicio de autoevaluación 7.3**

Calcular la potencia promedio transmitida por los modos TE en una guía de ondas rectangular de dimensiones $a \times b$.

**Solución**

Haciendo uso de la expresión para la componente longitudinal del fasor campo magnético y sustituyendo en la expresión para la potencia promedio dada por (7.36), tenemos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k\beta}{k_c^2}\int_0^a dx \int_0^b dy H_o^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

siendo $H_o$ la amplitud de la componente longitudinal para el modo en cuestión. Operando, para $m, n \neq 0$ se obtiene

$$\langle P_{TE} \rangle = \frac{\omega\mu\beta ab}{8k_c^2}H_o^2 \tag{7.41}$$

Para los casos particulares $\mathrm{TE}_{10}$ o $\mathrm{TE}_{01}$ obtenemos

$$\langle P_{TE}^{10} \rangle = \frac{\omega\mu\beta ab}{4k_c^2}H_o^2 \tag{7.42}$$

y

$$\langle P_{TE}^{01} \rangle = \frac{\omega\mu\beta ab}{4k_c^2}H_o^2 \tag{7.43}$$

**Ejercicio de autoevaluación 7.4**

Una guía de ondas rectangular, con dieléctrico aire, tiene dimensiones $a = 2,29$ cm y $b = 1,02$ cm. y transmite una onda progresiva $\mathrm{TE}_{10}$ con una

frecuencia de 9GHz. Si el valor máximo del campo eléctrico es $E_o = 10^4$ V/m, halle la potencia transmitida por la guía de onda en este modo.

**Solución**

La potencia promedio transmitida por los modos TE en una guía rectangular vale:

$$\langle P_{TE}^{10} \rangle = \frac{\omega\mu\beta ab}{4k_c^2} H_o^2$$

donde

$$k_c^{10} = \frac{\pi}{a} = 43{,}67\pi \text{ m}^{-1} \qquad ; \qquad \beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_{pho}^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = 41{,}14\pi \text{ m}^{-1}$$

y $H_o$ es el valor máximo (amplitud) de la componente $H_z$ del campo magnético. De las expresiones de los campos para el modo fundamental, deducimos las siguiente relación entre la amplitud del campo eléctrico y la amplitud de la componente longitudinal del campo magnético

$$E_o = \frac{\mu\omega a}{\pi} H_o$$

con lo cual:

$$< P_{TE_{10}} >= \frac{\omega\mu\beta ab}{4(k_c^{10})^2} \left(\frac{\pi}{\mu\omega a} E_o\right)^2 = \frac{b\beta\pi^2}{4(k_c^{10})^2 \mu\omega a} E_0^2 = 1{,}5 \text{ W}$$

## 4.1. Cálculo de la atenuación en guías

Igual que en una línea de transmisión, en una guía de ondas se producen pérdidas debido a la conductancia del material dieléctrico que llena la guía y a la conductividad finita de las paredes metálicas. Las pérdidas asociadas a la disipación en las paredes dan lugar a la aparición de un factor de atenuación pero las distribuciones transversales del campo son las mismas que hemos obtenido para las guías ideales. Sin embargo, las pérdidas debidas a la conductancia del dieléctrico que llena la guía conllevan, además de la aparición de un factor de atenuación, un cambio en las condiciones de contorno cuya consecuencia es que los modos no se propaguen en forma pura, sino que se establece un acoplamiento entre

ellos. No obstante lo anterior, si las pérdidas son pequeñas el acoplamiento entre los modos puede despreciarse y sólo tenemos que calcular el factor de atenuación.

### *Cálculo de la atenuación debido a la conductividad de la paredes*

Si $\langle P \rangle$ es la potencia transmitida por la guía y denominamos $\langle P'_D \rangle$ la potencia disipada por unidad de longitud en la dirección de propagación, tendremos que se verifica

$$\langle P'_D \rangle = -\frac{d\langle P \rangle}{dz}$$

es decir, la potencia disipada por unidad de longitud será igual a la disminución de potencia transmitida en una longitud unitaria de guía. Como la amplitud de la onda decae según $e^{-\alpha z}$ la potencia transmitida $< P >$ lo hará según $e^{-2\alpha z}$, con lo cual se obtiene

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\langle P \rangle}{dz}\right)\frac{1}{\langle P \rangle} = \frac{1}{2}\frac{\langle P'_D \rangle}{\langle P \rangle} \tag{7.44}$$

Si suponemos que el factor de atenuación debido a la disipación es pequeño, podemos calcularlo por el método perturbativo. Lo pasos a seguir son

- Suponemos que la distribución del campo electromagnético coincide fundamentalmente con la de la guía sin pérdidas.
- El campo magnético tangencial a la pared induce corrientes en la misma. Puesto que la conductividad es finita, dichas corrientes llevarán asociadas un campo eléctrico que será también tangencial a la pared. La combinación de ambos campos, eléctrico y magnético tangenciales a la pared, da lugar a un flujo del vector de Poynting dirigido hacia el interior de la pared y que coincide con la disipación por efecto Joule en el conductor. Esta energía se resta a la que se propaga en la dirección Z y por tanto la onda se atenúa.

Si $\widehat{\mathbf{E}}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$ son los campos existentes en la proximidad de la pared, la potencia promedio disipada por unidad de longitud vendrá dada por

$$\langle P'_D \rangle = \frac{1}{2}\Re\left\{\int_L \left(\widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^*\right) \cdot \mathbf{u}_n dl\right\} \tag{7.45}$$

siendo $L$ el contorno de la sección transversal de la guía y $\mathbf{u}_n$ el vector unitario normal a la pared, dirigido hacia el interior del conductor tal como se muestra en la figura 7.8.

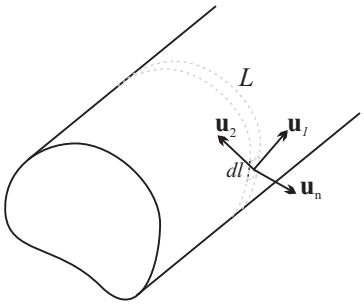



Figura 7.8. Línea de transmisión genérica

Los campos en el conductor vienen relacionados entre sí como los de una onda plana con dirección de propagación normal a la superficie. Efectivamente, si consideramos puntos muy cercanos a la pared de la guía, podemos considerar ésta plana de manera que es posible definir el triedro directo $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_n$ donde $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son tangenciales a la pared y $\mathbf{u}_n$ es la normal. La atenuación del campo en el conductor, en la dirección $\mathbf{u}_n$, es muy elevada y la amplitud del campo cae a $1/e$ de su valor en la superficie en un espesor igual a la profundidad de penetración $\delta$ dada por

$$\delta = \left( \frac{2}{\omega \mu_o \gamma} \right)^{1/2}$$

donde hemos supuesto que la pared de la guía es no magnética.

Entonces, podemos suponer que las variaciones del campo respecto a las coordenadas tangenciales $x_1$ y $x_2$ son despreciables. Pero esta es la la hipótesis de una onda plana que se propaga en la dirección $\mathbf{u}_n$. Este razonamiento es válido para el campo en las proximidades exteriores del metal, es decir, en el interior de la guía, dada la continuidad de las componentes tangenciales de $\widehat{\mathbf{E}}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$.

Por tanto, como ya vimos en el tema 5, cuando una onda plana se propaga en un medio conductor, los campos $\widehat{\mathbf{E}}$ y $\widehat{\mathbf{H}}$ son ortogonales entre sí y sus amplitudes están relacionadas por la impedancia de onda en el conductor:

$$\frac{\widehat{E}}{\widehat{H}} = \left( \frac{\mu_o \omega}{\gamma} \right)^{1/2} e^{j\pi/4}$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la potencia disipada por unidad de

longitud vendrá dada por

$$\langle P'_D \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_o \omega}{\gamma}\right)^{1/2} \Re\left\{e^{j\pi/4}\int_L \widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^* dl\right\}$$

$$\langle P'_D \rangle = \frac{1}{2\gamma\delta}\int_L \widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^* dl \tag{7.46}$$

resultando, para el coeficiente de atenuación la siguiente expresión

$$\alpha = \frac{1}{2\gamma\delta Z_T}\,\frac{\int_L \widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^* dl}{\int_{S_T}\widehat{\mathbf{H}}_t\cdot\widehat{\mathbf{H}}_t^*\, ds} \tag{7.47}$$

siendo $Z_T$ la impedancia de onda del modo en cuestión.

La única dificultad que podemos encontrar a la hora de aplicar esta relación es la aproximación de la pared por pequeñas zonas planas que sólo será válida cuando el radio de curvatura de la pared sea suficientemente grande de forma que la profundidad de penetración $\delta$ sea mucho menor que las distancias a lo largo del contorno en que $H$ cambie apreciablemente. Esta condición no se verifica en la guía rectangular, pero para esta guía el campo $H$ es nulo en las esquinas y por tanto, la relación (7.47) sigue siendo válida.

**Ejercicio de autoevaluación 7.5**

Calcular la atenuación del modo $\mathrm{TE}_{10}$ en guía rectangular de dimensiones $a \times b$.

**Solución**

La potencia transmitida por dicho modo se calculó en el ejemplo anterior y viene dada por

$$\langle P_{TE}^{10} \rangle = \frac{\omega\mu\beta ab}{4k_c^2}H_o^2$$

y, en términos de dicha potencia, la atenuación resulta

$$\alpha = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\mu_o\omega}{\gamma}\right)^{1/2}\frac{\int_L \widehat{\mathbf{H}}\cdot\widehat{\mathbf{H}}^* dl}{\langle P_{TE}^{10}\rangle}$$

con lo cual el único término a calcular es la integral del numerador. Como el modo fundamental en guía rectangular sólo tiene componentes $H_x$ y $H_z$

dicha integral es de la forma

$$\int_L \widehat{\mathbf{H}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^* dl = 2 \left\{ \int_0^a \left( \left| \widehat{H}_x \right|^2 + \left| \widehat{H}_z \right|^2 \right) dx + \int_0^b \left( \left| \widehat{H}_x \right|^2 + \left| \widehat{H}_z \right|^2 \right) dy \right\}$$

donde se ha tenido en cuenta que las pérdidas en las paredes opuestas son iguales. Sustituyendo las expresiones para $\widehat{H}_x$ y $\widehat{H}_z$ y operando se obtiene

$$\int_L \widehat{\mathbf{H}} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^* dl = 2H_o^2 \left[ \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{\beta^2}{(k_c^{10})^2} \right) + b \right]$$

Sustituyendo esta expresión arriba y operando adecuadamente se obtiene finalmente para el factor de atenuación del modo $\mathrm{TE}_{10}$ en una guía rectangular

$$\alpha = \frac{(2\omega\varepsilon/\gamma)^{1/2}}{2b \left[ 1 - (\omega_c/\omega)^2 \right]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right] \tag{7.48}$$

Utilizando el valor de la conductividad del cobre $5,8 \times 10^7$ $(\Omega\mathrm{m})^{-1}$, para una guía standard de la banda X se obtiene un factor de atenuación del orden de 0.1 dB/m para el modo fundamental en el centro de la banda. No obstante, conviene destacar que los factores de atenuación reales dependen fuertemente del estado de las superficies metálicas.

La dependencia del factor de atenuación con la frecuencia puede analizarse en términos generales a partir de la expresión (7.47). Esta dependencia puede expresarse simbólicamente en la forma:

$$\alpha \sim \frac{\beta}{\omega^{1/2}} \left[ A + B \left( |H_z|^2 / |H_t|^2 \right) \right]$$

para los modos TE, y

$$\alpha \sim \frac{\omega^{3/2}}{\beta}$$

para los modos TM. Teniendo en cuenta además que $\beta$ depende de la frecuencia según

$$\beta = k_{c,n} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

para los modos TM resulta una dependencia del tipo

$$\alpha = C\frac{(\omega/\omega_c)^{3/2}}{\left[(\omega/\omega_c)^2 - 1\right]^{1/2}}$$

siendo $C$ una constante de proporcionalidad. Se comprueba fácilmente que esta atenuación presenta un mínimo a la frecuencia $\omega/\omega_c = \sqrt{3}$.

Para los modos TE ha de tenerse en cuenta la contribución de $H_z$. De la ecuación que liga a $H_t$ con $H_z$ para estos modos, obtenemos que

$$\frac{H_z}{H_t} \propto \frac{1}{\beta}$$

Por tanto, en la expresión para la constante de atenuación aparecerá un término más debido a esta contribución. La expresión para la constante de atenuación para los modos TE queda

$$\alpha = \frac{C_z\,(\omega/\omega_c)^{-1/2} + C_t\,(\omega/\omega_c)^{3/2}}{\left[(\omega/\omega_c)^2 - 1\right]^{1/2}}$$

donde el primer término está asociado a las pérdidas debidas a $H_z$ y el segundo a las debidas a $H_t$ en las paredes. El primero decrece monótonamente con la frecuencia y el segundo presenta un mínimo análogo al analizado para los modos TM. Si en las paredes de la guía $H_t$ es nulo, sólo tendremos el primer término y las pérdidas pueden hacerse todo lo bajas que se desee operando a frecuencias suficientemente altas. Esta es la situación ya comentada de los modos $\mathrm{TE}_{0m}$ en guía cilíndrica, que los hace potencialmente muy útiles para transmisión guiada a larga distancia. En todos los modos analizados en gran variedad de sistemas de transmisión guiada, estos son los únicos que presentan la propiedad de que su factor de atenuación disminuye monótonamente con la frecuencia.

### *Cálculo de la atenuación debido a la conductancia del dieléctrico*

Pasamos por último a la atenuación debida a pérdidas volúmicas por el carácter disipativo de los materiales constitutivos del sistema. En este caso sólo es preciso tener en cuenta el carácter complejo del parámetro de caracterización del material. Supongamos, por ejemplo, una guía totalmente llena de un dieléctrico,

no magnético, disipativo, que caracterizaremos por su permitividad compleja

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

o bien por $\varepsilon'_r = \varepsilon'/\varepsilon_o$ y la tangente de pérdidas dada por

$$\tan\zeta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

Si suponemos una guía homogéneamente llena con este material, la relación de dispersión toma la forma ya familiar

$$\omega^2\mu_o\varepsilon = \kappa^2 + k_c^2$$

Como sabemos, el carácter complejo de $\varepsilon$ implica que la constante de propagación $\kappa$ sea también un número complejo con su componente imaginaria igual al factor de atenuación

$$\kappa = \beta - j\alpha$$

es decir

$$\omega^2\mu_o\left(\varepsilon' - j\varepsilon''\right) = (\beta - j\alpha)^2 + k_c^2$$

En situaciones en que $\alpha$ sea pequeña podemos despreciar el término en $\alpha^2$ y la relación anterior conduce a las siguientes expresiones

$$\omega^2\mu_o\varepsilon' = \beta^2 + k_c^2$$

y

$$\alpha = \frac{\omega^2\mu_o\varepsilon''}{2\beta} = \frac{\beta^2 + k_c^2}{2\beta}\tan\delta$$

Es decir, el factor de atenuación es proporcional a la tangente de pérdidas, en tanto que la constante de fase y, por tanto, la longitud de onda, no varía prácticamente respecto al valor correspondiente a guía sin pérdidas. La variación del factor de atenuación con la frecuencia, considerando un rango de frecuencias en que las propiedades del material no varíen, se deduce directamente de esta expresión: $\alpha$ es muy elevada a frecuencias próximas a la de corte, al aumentar la frecuencia, disminuye hasta alcanzar un valor mínimo y luego crece proporcionalmente a la misma.

**Ejercicio de autoevaluación 7.6**

Una guía de ondas rectangular de dimensiones $a = 5$ cm y $b = 2{,}5$ cm, llena de aire, tiene 80 cm de longitud y suministra 1.2 kW a una carga adaptada a 4.5 GHz. Suponga que la constante de atenuación es $\alpha = 5{,}75\times10^{-3}$neper/m.

Determine qué modos se propagan en la guía. Exprese la constante de atenuación en dB/m y calcule la potencia disipada en las paredes de la guía.

**Solución**

Para ver los modos que se propagan en la guía tenemos que calcular las frecuencias de corte de los distintos modos

**Modo $\mathbf{TE}_{10}$:**

$$f_c^{TE_{10}} = \frac{c}{2\pi} k_c^{10} = \frac{c}{2\pi}\frac{\pi}{a} = \frac{3\cdot 10^8}{2\times 0{,}5} = 3 \text{ GHz}$$

**Modo $\mathbf{TE}_{01}$**

$$f_c^{TE_{01}} = \frac{c}{2\pi} k_c^{01} = \frac{c}{2\pi}\frac{\pi}{b} = \frac{3\cdot 10^8}{2\times 0{,}25} = 6 \text{ GHz}$$

Puesto que la frecuencia de la señal es $f = 4{,}5$ GHz, se propaga unicamente el modo fundamental.

La relación entre los nepers y los decibelios es

$$\mathrm{N}_{dB} = 8{,}69 \ \mathrm{N}_{neper}$$

Por tanto, la constante de atenuación expresada en decibelios es

$$\alpha = 0{,}05 \text{ dB/m}$$

La relación entre la potencia de entrada en la guía, la potencia disipada en la carga y la potencia disipada en la guía es

$$\langle P_{en} \rangle = \langle P_D \rangle + \langle P_L \rangle$$

La potencia en la carga es por tanto

$$\langle P_L \rangle = \langle P_{en} \rangle - \langle P'_D \rangle L$$

siendo $L$ la longitud de la línea y $\langle P'_D \rangle$ la potencia disipada por unidad de longitud. Por otro lado sabemos que el factor de atenuación viene dado por:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\langle P'_D \rangle}{\langle P_{en} \rangle}$$

Luego, la potencia disipada por unidad de longitud es

$$\langle P'_D \rangle = 5{,}75 \cdot 10^{-3} \times 1{,}2 \cdot 10^{3} \times 2 = 13{,}8 \text{ W/m}$$

Y la potencia disipada en las paredes de la guía

$$\langle P_D \rangle = \langle P'_D \rangle L = 11{,}04 \text{ W}$$

## 5. CAVIDADES RESONANTES

Las cavidades resonantes están constituidas esencialmente por una región dieléctrica encerrada por paredes conductoras. Estos sistemas son capaces de almacenar densidades elevadas de energía electromagnética. A frecuencias de microondas, son el equivalente a los circuitos resonantes de baja frecuencia.

Las frecuencias a las que una cavidad resonante puede almacenar energía electromagnética se denominan frecuencias de resonancia. La principal diferencia con los circuitos resonantes de baja frecuencia es que mientras estos últimos poseen una única frecuencia de resonancia, una cavidad resonante posee un número discreto, pero indefinido, de frecuencias de resonancia.

Para resolver el problema de la distribución de campo en una cavidad haremos uso de los resultados que ya hemos obtenido para las guías de onda construyendo la cavidad a partir de una sección de guía de ondas. Para ello consideramos una guía de ondas genérica como la representada en la figura 7.9*a* y suponemos que se propaga, por ejemplo, un modo $\text{TE}_{mn}$. Si en un punto $A$ del eje Z se coloca un cortocircuito metálico (en plano perpendicular a Z) se formará, como se muestra en la figura 7.9*b*, una onda estacionaria en el lado izquierdo de la guía. Esta onda estacionaria está formada por la superposición de dos ondas, la incidente y la reflejada y verifica que el campo eléctrico transversal $\widehat{\mathbf{E}}_t$ es nulo en punto $A$ donde se ha situado el cortocircuito y alcanza valores mínimos en puntos distantes entre sí $\lambda'/2$, siendo $\lambda'$ la longitud de onda en la guía. Estos mínimos serán nulos si la guía es sin pérdidas.

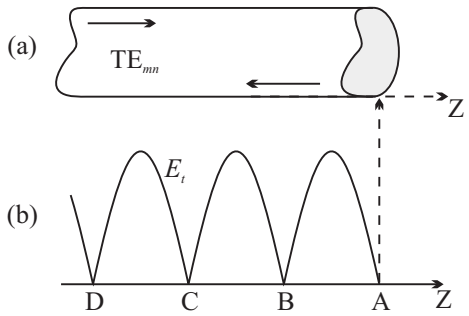



Figura 7.9. Cavidad resonante

Si a continuación colocamos otro cortocircuito en alguno de estos mínimos, $C$ o $D$, las condiciones de contorno no varían y la solución del problema inicial sigue siendo válida. Suponemos que en el cortocircuito colocado en segundo lugar existe un pequeño orificio para la excitación del campo que no altera la distribución del mismo. De esta forma hemos construido una cavidad resonante capaz de almacenar una densidad elevada de energía electromagnética por reflexión sucesiva de la onda en ambos cortocircuitos.

Evidentemente, un cambio en la posición del cortocircuito, o bien una modificación de la frecuencia de excitación alterarían las condiciones que hacen posible la resonancia y la cavidad dejaría de almacenar energía electromagnética.

Puesto que conocemos la solución del campo electromagnético de la guía base es inmediato obtener la expresión del campo electromagnético de la cavidad. Como ya hemos visto, la distribución del campo eléctrico transversal en una guía de ondas es de la forma

$$\widehat{\mathbf{E}}_t = A\widehat{e}(x,y)e^{-j\beta z}\mathbf{u}_t$$

En la cavidad, el campo total vendrá dado por la superposición del campo de la onda incidente y el campo de la onda reflejada

$$\widehat{\mathbf{E}}_t = A\widehat{e}(x,y)(e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z})\mathbf{u}_t = -2jA\widehat{e}(x,y)\,\mathrm{sen}(\beta z)\mathbf{u}_t$$

donde $\beta$ está determinado por la relación de dispersión

$$\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon - (k_c^{mn})^2$$

Imponiendo la condición de que el campo transversal $\widehat{\mathbf{E}}_t$ se anule en las posiciones

$z = 0$ y $z = L$ obtenemos la condición de cuantización de $\beta$

$$\operatorname{sen} \beta L = 0 \Rightarrow \beta = \frac{p\pi}{L} \qquad ; \qquad p = 1, 2...$$

La consecuencia de esta condición es que la onda en el interior de la cavidad puede existir sólo para una frecuencia de resonancia $\omega_{m,n,p}$ que, teniendo en cuenta la relación de dispersión, viene dada por

$$\omega_{m,n,p} = v_{pho} \sqrt{(k_c^{mn})^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \tag{7.49}$$

Puesto que este modo de resonancia proviene de un modo $\mathrm{TE}_{mn}$ de la guía, se identifica por $\mathrm{TE}_{mnp}$.

Haciendo un desarrollo completamente paralelo, a partir de los modos $\mathrm{TM}_{mn}$ de una guía de ondas, obtenemos los modos $\mathrm{TM}_{mnp}$ de una cavidad.

A modo de ejemplo, vamos a estudiar los modos $\mathrm{TE}_{10p}$ de la cavidad monstrada en la figura 7.10 construida a partir de una sección de guía rectangular.

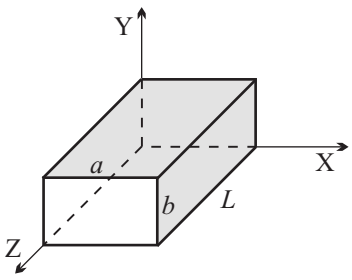



Figura 7.10. Cavidad resonante
a partir de una guía rectangular

Para ello partimos de la expresión general de la componente $\mathrm{H}_z$ del modo $\mathrm{TE}_{10}$. El campo en la cavidad vendrá dado por la superposición de dos ondas, incidente y reflejada:

$$\widehat{H}_z = H_o^i \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} + H_o^r \cos \frac{\pi x}{a} e^{j\beta z}$$

Este campo ha de ser nulo en $z = 0, L$, de donde se obtiene que

$$H_o^i = -H_o^r \qquad \text{y} \qquad \beta L = p\pi \qquad \text{con} \qquad p = 1, 2, ...$$

Por tanto, la componente longitudinal del campo resultante en la cavidad es

$$\widehat{H}_z = -2jH_o^i \cos\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{p\pi}{L} z \tag{7.50}$$

Y la frecuencia de resonancia será

$$\omega_{10p} = v_{pho}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \tag{7.51}$$

Las restantes componentes se obtienen a partir de la componente longitudinal a partir de las relaciones generales (7.6). Finalmente las componentes del campo en la cavidad son

$$\begin{aligned} \widehat{H}_z &= -2jH_o^i \cos\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{p\pi}{L} z \\ \widehat{H}_x &= \frac{2ap}{L} H_o^i \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \cos\frac{p\pi}{L} z \\ \widehat{E}_y &= -\frac{2ap}{\pi}\omega\mu H_o^i \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{p\pi}{L} z \end{aligned} \tag{7.52}$$

Se puede observar que $\widehat{H}_z$ y $\widehat{E}_y$ se anulan en $z = 0, L$, mientras que $\widehat{H}_x$ alcanza una amplitud máxima en dichas posiciones, como corresponde a máxima intensidad circulante por los cortocircuitos. Por otra parte es importante resaltar el desfase de $90^o$ entre el campo eléctrico y las componentes magnéticas, que corresponde a la hipótesis de pérdidas nulas de la que hemos partido.

## 5.1. Factor de calidad

Como hemos visto, la cavidad resuena para un conjunto finito de frecuencias. Cuando una cavidad opera en un modo determinado toda la energía almacenada corresponderá a una onda estacionaria a la frecuencia de resonancia si la cavidad es ideal, sin pérdidas. Sin embargo en la práctica, una cavidad no solo responderá a señales correspondientes a la frecuencia de resonancia sino también a señales en un estrecho margen de frecuencias en torno a la de resonancia. En la figura 7.11 se muestra la curva de resonancia de una cavidad que nos da la energía almacenada por unidad de tiempo en función de la frecuencia. Se define la anchura de banda $\triangle\omega$ de la cavidad como el intervalo de frecuencias comprendido entre los valores de semipotencia.

La razón de este comportamiento, como ya se ha comentado, es la pérdida de energía que tiene lugar en la cavidad. La conductividad finita de las paredes permite que el campo penetre en ellas un espesor caracterizado por la profundidad de penetración, el denominado efecto skin, produciéndose disipación por efecto Joule. Otra fuente de pérdidas es la asociada a los materiales dieléctricos que llenan la cavidad. Además, también existirán pérdidas por radiación aunque generalmente son muy pequeñas. En una cavidad ideal el campo electromagnético está confinado y no hay radiación fuera de la cavidad. Sin embargo, en las cavidades reales el confinamiento no es total ya que en ellas se practican orificios por donde poder excitar o extraer energía.

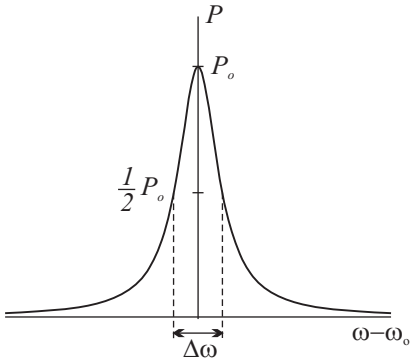



Figura 7.11. Respuesta en frecuencias para una cavidad resonante

Para caracterizar las pérdidas de una cavidad resonante, o lo que es lo mismo su anchura de respuesta en frecuencias, se introduce, al igual que en baja frecuencia, el **factor de calidad** o factor Q, definido por la relación entre la energía promedio almacenada y la energía disipada

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \left[ \frac{\text{Energía media almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} \right]_{\omega=\omega_o} \\ &= \omega_o \left[ \frac{\text{Energía media almacenada}}{\text{Energía disipada por segundo}} \right] \end{aligned} \tag{7.53}$$

siendo $\omega_o$ la frecuencia en que resuena la cavidad.

Es posible obtener la siguiente expresión para la curva de resonancia de una

cavidad

$$\langle P(\omega)\rangle = \frac{\langle P(\omega_o)\rangle}{1+\left[2Q\frac{\omega-\omega_o}{\omega_o}\right]^2} \tag{7.54}$$

que proporciona la potencia promedio almacenada en la cavidad en función de la frecuencia y del factor de calidad. Teniendo en cuenta la definición del ancho de banda, el factor de calidad $Q$ se puede expresar también como la relación entre la frecuencia de resonancia $\omega_o$ y el ancho de banda $\triangle\omega$ de la cavidad

$$Q = \frac{\omega_o}{\triangle\omega} \tag{7.55}$$

El ancho de banda $\triangle\omega$ de una cavidad en torno a una frecuencia de resonancia se puede determinar experimentalmente alimentando la cavidad con la señal procedente de un oscilador que permita pequeños barridos en frecuencia en torno a la resonancia que se desea analizar. Si suponemos que la potencia de alimentación permanece constante en el margen de frecuencias deseado, la potencia de salida presentará una variación como la representada en la figura 7.11. De esta forma es posible determinar experimentalmente el factor de calidad de la cavidad.

**Ejercicio de autoevaluación 7.7**

Una cavidad paralelepípeda de dimensiones $a = L = 2b$, opera en modo $\mathrm{TE}_{101}$ y contiene aire. Halle la frecuencia de resonancia si $a = 4$ cm. Manteniendo la misma relación $a = L = 2b$ y la misma frecuencia de resonancia, se desea una cavidad llena de teflón cuya permitividad eléctrica es $\varepsilon = 2{,}1\varepsilon_o$. Halle las dimensiones de la cavidad.

**Solución**

El modo $\mathrm{TE}_{10}$ correspondiente a la guía rectangular tiene una longitud de onda de corte

$$\lambda_c = 2a = 8 \text{ cm}$$

y una constante de propagación

$$k_c^{10} = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{\pi}{4\cdot 10^{-2}} \text{ m}^{-1}$$

La relación de dispersión para la cavidad rectangular correspondiente es

$$\omega^2 = v_{pho}^2 \left[ \left(k_c^{10}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \right]$$

donde $L = a = 4$ cm y $v_{pho}$ es la velocidad de la luz en el vacio, esto es $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Puesto que la cavidad opera en el modo $\mathrm{TE}_{101}$, significa que $p = 1$. Por tanto, sustituyendo valores podemos determinar la frecuencia de resonancia

$$\omega_{101}^2 = \frac{\pi^2 \cdot 10^4 c^2}{8}$$

$$4\pi^2 f_{101}^2 = \frac{\pi^2 \cdot 10^4 c^2}{8}$$

$$f_{101}^2 = \frac{10^4 c^2}{32} \Rightarrow f = \frac{10^2 c}{\sqrt{32}} = 5{,}3 \cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$$

finalmente

$$f_{101} = 5{,}3\ \mathrm{GHz}$$

Para determinar las dimensiones de la cavidad, en el caso en que esté llena de teflón, y conservando la frecuencia y las relaciones dimensionales, aplicamos de nuevo la relación de dispersión

$$\omega_{101}^2 = v_{pho}^2 \left[ \left(k_c^{10}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \right]$$

donde ahora

$$v_{pho} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{2{,}1}}$$

Tenemos entonces

$$\omega_{101}^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{2{,}1}}\right)^2 \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right]$$

Obtenemos para la dimensión $a$ de la cavidad el valor

$$a = 2{,}76\ \mathrm{cm}$$

Y por tanto

$$L = 2{,}76 \text{ cm}$$

$$b = 1{,}38 \text{ cm}$$

◀

## 6. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 7.1** En una guía rectangular de dieléctrico aire y dimensiones $a = 10$ cm y $b = 5$ cm, se transmite una onda $\mathrm{TM}_{mn}$. Se observa que la distancia entre dos ceros consecutivos es 10 cm. Determinar el modo que se transmite en la guía cuando la frecuencia de trabajo es $f = 4,5 \cdot 10^9$ Hz.

Si la amplitud de la componente longitudinal del campo eléctrico es de 50 V/m obtenga las expresiones para las componentes del campo que se propaga en la guía.

**E 7.2** En una guía cuadrada de dieléctrico aire y dimensiones $5 \times 5$ cm, se transmite un modo a la frecuencia de 6GHz. Se observa que el flujo de corriente en las caras es solamente longitudinal y que la distancia entre dos mínimos sucesivos del campo eléctrico transversal es la mitad de la longitud de onda de corte de la guía de dicho modo. Hallar el modo que se propaga por la guía. De dicho modo se sabe que

$$\widehat{E}_z = E_o \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y) e^{-j\beta z}$$

Halle las componentes transversales de los campos. Halle la expresión de la potencia transmitida $< P >$ en la guía.

**E 7.3** Para transmitir una señal de longitud de onda en el vacío dada por $\lambda = 0,1$ m se desea utilizar una guía rectangular ordinaria (dieléctrico aire) de manera que el modo $\mathrm{TE}_{10}$ se propague con un factor de seguridad del 30 % ($f = 1,3 f_c$). Al mismo tiempo la frecuencia de corte del modo superior inmediatamente próximo debe ser un 30 % mayor que la de la onda. Se pide hallar las dimensiones $a$ y $b$ de la guía con estas condiciones.

Si se deseara transmitir la misma señal mediante una guía llena completamente con un material dieléctrico de $\varepsilon = 4\varepsilon_o$ en vez de aire y manteniendo las mismas condiciones¿Cuáles serían las dimensiones $a'$ y $b'$ ¿Cuál sería la constante de propagación?

**E 7.4** Se dispone de una guía de ondas rectangular, llena de aire, de dimensiones $a = 2,29$ cm y $b = 1,02$ cm. La frecuencia de excitación es de 8GHz. Determine el modo que se transmite, la longitud de onda de corte y la longitud de onda en la guía. Escriba las expresiones de los campos para el modo dominante supuesta conocida la amplitud de la componente longitudinal.

**E 7.5** Una guía de ondas rectangular, con dieléctrico aire, tiene dimensiones $a = 10{,}16$ cm y $b = 5{,}08$ cm. Determine la frecuencia de corte del modo $\mathrm{TM}_{11}$. En este modo de propagación calcule la longitud de onda de la guía y su impedancia

característica $Z_{TM_{11}}$ suponiendo que está operando en una frecuencia 30 % veces superior a la frecuencia de corte. Dado el valor de la amplitud $E_o$ de la componente longitudinal $\widehat{E}_z$ del campo eléctrico, halle los valores de las amplitudes de los campos transversales.

**E 7.6** Una guía rectangular con dieléctrico aire y dimensiones 7,62×3,81cm opera en el modo $TE_{10}$. Se mide la distancia entre mínimos sucesivos del perfil de onda estacionaria y su valor es de 0,1 m.

Halle la frecuencia a la que está trabajando la guía de ondas. Determine la impedancia de onda del modo y la potencia promedio que transmite la guía si la amplitud máxima del campo eléctrico es 1000 V/m.

**E 7.7** Considere una guía rectangular con dieléctrico aire y dimensiones 7,62 × 3,81 cm. Determine el intervalo de frecuencias en el que la guía transmite únicamente el modo $TE_{10}$. Si la guía opera con una frecuencia de 2.45 GHz. ¿Qué modo se propaga?¿Qué distancia separa dos mínimos consecutivos de las ondas estacionarias que se porducen en la guía? ¿Cuál es la impedancia del modo?

En esta situación, la componente según la dirección de propagación es

$$\widehat{H}_z = H_o \cos(41,23x)e^{-30,5z}$$

Justifique los valores numéricos que en ella figuran. Escriba las expresiones para las otras componentes del campo electromagnético que se propaga en la guía.

**E 7.8** Una guía de ondas rectangular, con dieléctrico aire, tiene dimensiones $a = 2{,}29$ cm y $b = 1{,}02$ cm. Determine la frecuencia de corte del modo TM de orden más bajo. Halle la constante de propagación $\beta$, la longitud de onda en la guía, la velocidad de fase y la impedancia de onda característica correspondiente a dicho modo cuando la guía opera a una frecuencia doble de la frecuencia de corte.

**E 7.9** Una guía de ondas rectangular, con dieléctrico aire, tiene dimensiones $a = 2{,}29$ cm y $b = 1{,}02$ cm, y transmite una onda progresiva $TE_{10}$ con una frecuencia de 9GHz.

Determine la constante de fase $\beta$, la longitud de onda en la guía, la velocidad de fase y la impedancia de onda característica asociada a dicho modo.

Si el valor máximo del campo eléctrico es $E_o = 10^4$ V/m, halle los valores máximos de las componentes del campo magnético y determine la potencia transmitida por la guía en este modo.

**E 7.10** Una guía de ondas rectangular de dimensiones $a = 5$ cm y $b = 2{,}5$ cm,

llena de aire, tiene 80 cm de longitud y suministra 1.2kW a una carga adaptada a 4,5 GHz. Suponga que la constante de atenuación es $\alpha = 5{,}75 \times 10^{-3}$ neper/m.

¿Qué modos se propagan en la guía?¿Cuánto es $\alpha$ en dB/m? Calcule la potencia disipada en las paredes de la guía.

En el modo $\mathrm{TE}_{10}$ se tiene

$$\widehat{H}_z = H_o \cos(\pi x/a) e^{-\beta z}$$

Halle $\widehat{E}_y$ y $\widehat{H}_x$

Demuestre que

$$\langle P_t \rangle = E_o^2 \frac{ab}{4Z_o} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

siendo $E_o$ la amplitud máxima del campo eléctrico, $f_c$ la frecuencia de corte y $Z_o = \sqrt{\mu_o/\varepsilon_o} = 120\pi$ la impedancia característica del vacío.

Tema 8

# RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

## RESUMEN

### Objetivos generales

Estudiar la radiación del campo electromagnético, sus caractarísticas fundamentales y los dispositivos, antenas, utilizados para radiar y detectar un campo electromagnético.

### Objetivos específicos

- Analizar y comprender el significado de cada término de la ecuación de ondas para los potenciales escalar y vectorial.
- Comprender el origen y significado de los potenciales retardados.
- Particularizar los potenciales retardados al estudio de la radiación de un dipolo corto o dipolo elemental.
- Obtener los campos eléctrico y magnético de un dipolo elemental y estudiar sus características en las regiones de interés.
- Obtener la potencia radiada por un dipolo elemental.
- Establecer la antena como dispositivo diseñado especialmente para radiar y definir los parámetros que la caracterizan.
- Obtención y análisis de los campos producidos por la antena lineal y la antena de cuadro.
- Estudiar las agrupaciones de antenas y sus propiedades directivas.

## Requisitos previos

Manejar los conceptos de campo vectorial y escalar, campo eléctrico, campo magnético. Dominar el cálculo vectorial integral y diferencial. Notación fasorial.

## INTRODUCCIÓN

En temas anteriores hemos estudiado la propagación de ondas electromagnéticas sin preocuparnos del origen de dichas ondas. Ahora vamos a estudiar la ecuación de ondas con fuentes cuya solución nos permite analizar cómo se generan las ondas y estudiar la radiación electromagnética. La radiación electromagnética es la perturbación electromagnética producida por un conjunto de cargas aceleradas que se propaga hacia puntos alejados de las fuentes olvidándose de su origen.

Así pues, el objetivo de la primera parte del tema será obtener las expresiones de los potenciales creados por distribuciones arbitrarias de cargas y corrientes, que denominaremos **potenciales retardados** por razones que serán obvias y, a partir de ellos, obtener las expresiones del campo electromagnético.

La segunda parte del tema se centrará en aplicar estos resultados al estudio de antenas que son los sistemas especificamente diseñados para emitir o recibir señales electromagnéticas.

En general, una antena es una estructura metálica que tiene como misión adaptar una onda guiada que se propaga en una línea de transmisión a una onda electromagnética que se propaga en el espacio libre. Según se utilice con el fin de transmitir energía del sistema transmisor al espacio libre o viceversa la antena actúa como transmisora o receptora.

De acuerdo con las caracterísicas esperadas de la antena: frecuencia de trabajo; ancho de banda; optimización de la recepción o emisión en determinada dirección; etc., una antena puede tomar diferentes configuraciones. Por ejemplo, la antena puede ser un hilo conductor con determinada dimensión y forma geométrica, una abertura en un sistema transmisor, un conjunto de radiadores, un reflector, etc.

## 1. POTENCIALES RETARDADOS

En este apartado vamos a resolver las ecuaciones de ondas no homogéneas (4.32) y (4.33) para los potenciales $\mathbf{A}$ y $V$. En adelante vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que las ondas se generan y propagan en el vacío de manera que las constantes del medio son $\varepsilon_o$, $\mu_o$ y $\gamma = 0$. Comenzaremos con la ecuación

de ondas para el potencial escalar que repetimos aquí

$$\nabla^2 V - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Es inmediato comprobar que esta ecuación se reduce a la de Poisson (que resolvimos en electrostática) cuando el potencial no depende del tiempo y por tanto $\partial V/\partial t = 0$.

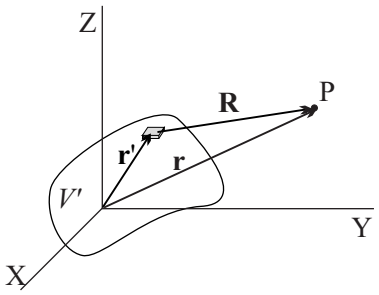



Figura 8.1. Distribución arbitraria de carga

La solución que se obtuvo para el potencial en un punto P debido a una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$ en un volumen $V'$, como muestra la figura 8.1, es de la forma

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

Esta solución de la ecuación de Poisson no se puede trasladar al caso de potenciales variables con el tiempo mediante la mera sustitución de $\rho(\mathbf{r}')$ por $\rho(\mathbf{r}', t)$ porque ahora, la ecuación de ondas para el potencial incluye una derivada segunda con respecto al tiempo que modifica el comportamiento del potencial y por tanto la solución de dicha ecuación.

Para resolver la ecuación para el potencial escalar procederemos de la siguiente forma: consideramos una carga elemental situada en el origen de coordenadas, que en el instante $t$ viene dada por $\Delta q(t) = \rho(t) dv'$ y resolvemos la ecuación para los puntos del espacio donde no existe carga. A continuación hacemos que esta solución verifique la ecuación no homogénea en el punto donde se sitúa la carga, que es el origen de coordenadas en nuestro caso.

Así, fuera del origen, el potencial satisface la siguiente ecuación

$$\nabla^2 V - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 V}{\partial\, t^2} = 0$$

Como sólo existe carga en el origen, la solución tiene simetría esférica. Esto significa que el potencial no dependerá de las coordenadas $\theta$ y $\phi$. Por tanto, si expresamos la ecuación anterior en coordenadas esféricas sólo quedará la parte radial

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Si aplicamos el siguiente cambio

$$V(r,t) = \frac{\phi(r,\,t)}{r}$$

La ecuación que obtenemos para $\phi(r,\,t)$ es

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

donde $c = 1/\sqrt{\mu_o\varepsilon_o}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Esta ecuación es la misma que hemos resuelto en el caso de ondas planas en el tema 5 y ya sabemos que las soluciones son del tipo

$$\phi(r,t) = f(t \pm \frac{r}{c})$$

Aunque la solución $f(t+r/c)$ es posible matemáticamente, no es aceptable desde el punto de vista físico porque contradice el principio de causalidad. Efectivamente, esta solución implicaría que las variaciones del potencial se observarían en un punto situado a una distancia $r$ de las fuentes antes de que se modifique el estado de las cargas que originan dichas variaciones, es decir, se observaría el efecto antes que la causa, lo cual no es admisible físicamente. Por tanto, de ahora en adelante consideramos la solución

$$\phi(r,t) = f(t - \frac{r}{c})$$

y el potencial será,

$$V(r,t) = \frac{f(t-r/c)}{r} \tag{8.1}$$

Para que se verifique la ecuación de ondas no homogénea en puntos muy próximos al origen, cuando $r \to 0$, la solución anterior debe ser igual al potencial de una carga $\Delta q(t)$ situada en el origen de coordenadas. Es decir

$$\text{Cuando } r \to 0 \qquad V(r,t) \to \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\Delta q(t)}{r}$$

Por comparación, tendremos entonces que

$$V(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\Delta q(t-r/c)}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\rho(t-r/c)dv'}{r}$$

Si se trata de una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}', t)$ en un volumen $V'$ la solución general para el potencial en un punto $\mathbf{r}$ y en el instante $t$ es la siguiente,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dv' \end{aligned} \tag{8.2}$$

donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es la distancia entre el punto fuente y el punto campo.

Esta expresión pone de manifiesto que el potencial del campo en un punto de observación que se encuentra a una distancia $r$ del origen de coordenadas, viene determinado, en el instante $t$, por el valor de las fuentes en un instante anterior dado por $\tau^- = t - R/c$. El potencial así obtenido se denomina **potencial retardado** y la cantidad $R/c$ **tiempo de retardo**. El tiempo de retardo representa el intervalo de tiempo durante el cual el campo electromagnético, que se propaga a la velocidad de la luz, recorre la distancia $R$. Este término de retardo será fundamental, como veremos, en la obtención de los campos de radiación.

Si en la deducción anterior hubiésemos considerado la solución $f(t + r/c)$ hubiésemos obtenido una expresión para el potencial tal que su valor en el intante $t$ depende del valor de la densidad de carga en el instante $\tau^+ = t + R/c$, es decir, en un instante posterior a $t$. Este potencial se denomina **potencial avanzado.**

La aparición de potenciales retardados y avanzados como soluciones igualmente válidas de las ecuaciones para el potencial es natural desde el punto de vista matemático. Al igual que las ecuaciones de la mecánica, las ecuaciones de la electrodinámica son simétricas respecto del futuro y del pasado. No cambian cuando se sustituye $t$ por $(-t)$ y, en consecuencia, deben poseer una solución general que es invariante respecto del cambio de signo del tiempo. La elección de uno u otro se determina aplicando el principio de causalidad que debe imperar en todo fenómeno físico.

La solución para el potencial vector $\mathbf{A}$ se obtiene a partir de la ecuación (4.32). Dicha ecuación se descompone en tres, una para cada componente, de forma que la ecuación para cada componente es similar a la del potencial escalar. Cada una de las ecuaciones se resuelve procediendo de una forma similar al caso del potencial escalar. La solución que resulta para el potencial vector retardado es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{8.3}$$

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ se obtienen aplicando respectivamente las ecuaciones (4.26) y (4.23). Dichos campos serán función del tiempo retardado $\tau^- = t - R/c$ y por tanto se observarán en un punto del espacio con un tiempo de retraso $R/c$ con respecto al momento en que se produce la perturbación donde se sitúan las cargas y corrientes.

Cuando las densidades de carga y corriente son funciones armónicas con el tiempo podemos expresarlas mediante magnitudes fasoriales de manera análoga a como hemos hecho en temas anteriores con los campos. Entonces tendremos

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\widehat{\rho}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\}$$

y

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right\}$$

Con este tipo de fuentes podemos pasar al dominio de la frecuencia y las ecuaciones de ondas para los potenciales electrodinámicos quedan de la siguiente forma

$$\nabla^2\widehat{V} - k^2\widehat{V} = -\frac{\widehat{\rho}(\mathbf{r})}{\varepsilon_o}$$

y

$$\nabla^2\widehat{\mathbf{A}} - k^2\widehat{\mathbf{A}} = -\mu_o\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$$

donde $k = \omega/c$. En este caso, las expresiones fasoriales para los potenciales retardados escalar y vector son respectivamente

$$\widehat{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{V'}\frac{\widehat{\rho}(\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \tag{8.4}$$

y

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V'}\frac{\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{8.5}$$

La expresión en el dominio del tiempo se obtiene multiplicando por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real.

En los apartados siguientes calcularemos, a partir de los potenciales retardados obtenidos, los campos radiados por un dipolo corto. Después, utilizaremos los campos obtenidos en el caso de un dipolo corto para calcular, mediante la aplicación del principio de superposición lineal, los campos creados por una antena lineal.

## 2. RADIACIÓN DE UN DIPOLO CORTO

Para introducir la ideas fundamentales sobre radiación electromagnética utilizaremos el **dipolo corto** o dipolo hertziano. Éste consiste en un conductor lineal cuya longitud es muy corta en comparación con la longitud de onda de la señal. Esto nos permitirá suponer que la corriente es uniforme a lo largo de todo el dipolo.

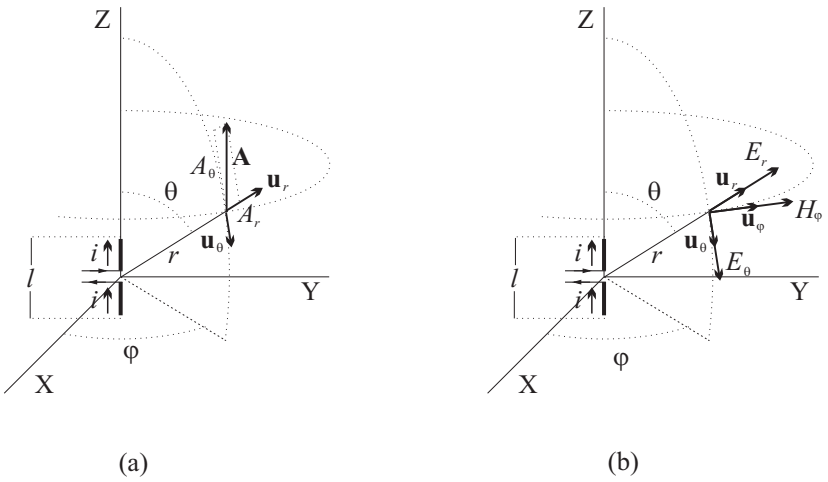



Figura 8.2. Dipolo coto situado en el origen de coordenadas

En la figura 8.2(a) se muestra el esquema de dicho dipolo. La corriente varía sinusoidalmemte con el tiempo, de forma que su expresión matemática es,

$$i(t) = I_o \cos \omega t$$

En este caso, la corriente fasorial es $\widehat{I} = I_o$, es decir

$$i(t) = \Re \left\{ \widehat{I} e^{j\omega t} \right\}$$

El campo magnético se puede obtener a partir del rotacional del potencial vector **A**

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \widehat{\mathbf{A}}$$

y el campo eléctrico a partir del Teorema de Ampère

$$\widehat{\mathbf{E}} = \frac{-j}{\omega \varepsilon_o} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}$$

Por tanto, vamos a obtener el potencial vector debido a este dipolo elemental situado en el origen. El elemento de corriente de este dipolo corto vendrá dado por

$$\widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')dv' = \mathbf{u}_z I_o dz'$$

Entonces, la expresión (8.5) para el potencial vector será

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_o \mathbf{u}_z \exp(-jkR)dz'}{R}$$

donde los límites de integración van desde $-l/2$ a $l/2$, siendo $l$ la longitud del dipolo. Para simplificar la integración de esta expresión vamos a ver cómo se puede aproximar $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ teniendo en cuenta las dimensiones del dipolo, la frecuencia de operación y el punto donde calculamos los campos. La aproximación para el denominador es menos crítica que para el exponente,[1] por tanto estudiaremos en cada caso cómo se lleva a cabo dicha aproximación.

Teniendo en cuenta la figura 8.2(b), vemos que $\mathbf{r}' = z'\mathbf{u}_z$ y $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. Entonces

$$\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| = \left[r^2 + z'^2 - 2z'r\,\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z\right]^{1/2}$$

con $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = \cos\theta$.

Consideremos ahora los puntos extremos del dipolo en los que $z' = \pm l/2$. Para ellos, el valor de $R$ vendrá dado por

$$\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| = \left[r^2 + \frac{l^2}{4} \mp l\,r\,\cos\theta\right]^{1/2} = r\left[1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 \mp \frac{l}{r}\,\cos\theta\right]^{1/2}$$

Ahora bien, si el tamaño del dipolo es muy pequeño comparado con la distancia al punto donde evaluamos los campos, se verificará que

$$\left(\frac{l}{2r}\right)^2 \ll 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{l}{r} \ll 1$$

es decir, ambos términos se pueden despreciar frente a la unidad de forma que el denominador se puede aproximar por

$$\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| \simeq r$$

[1] Matemáticamente, una exponencial es muy sensible a una pequeña variación del argumento. Por este motivo hay que proceder con mucho más precaución a la hora buscar una aproximación válida para la función $e^{-jkR}$

sin cometer error apreciable.

Cuando tratamos el efecto sobre la fase debemos tener en cuenta que $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ está multiplicado por $k=2\pi/\lambda$. Al estar en una exponencial pequeñas variaciones de fase implican grandes variaciones de $\mathbf{A}$, de modo que, con la condición $l \ll r$ podemos seguir despreciando el término $(l/2r)^2$ que es de segundo orden, pero no el término $l/r$. Para buscar una aproximación aceptable se lleva a cabo un desarrollo en serie del binomio resultante y nos quedamos con los dos primeros términos. Esto es

$$\left[1 \mp \frac{l}{r}\,\cos\theta\right]^{1/2} \simeq 1 \mp \frac{l}{2r}\,\cos\theta$$

Entonces, el argumento de la exponencial puede aproximarse por la expresión,

$$k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| \simeq k\,r \mp k\frac{l}{2}\cos\theta$$

Si se verifica que $kl \ll 1$, es decir, que el tamaño del dipolo es mucho menor que la longitud de onda de la señal, $l \ll \lambda$, el segundo término de la expresión anterior será despreciable frente al primero. Pero esta suposición formaba parte de la hipótesis de partida para poder considerar la amplitud de la corriente constante a lo largo del dipolo. Por tanto, podemos aproximar la exponencial por

$$k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| \simeq k\,r$$

Con esta aproximación, la exponencial sale fuera de la integral y tendremos

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mathbf{u}_z\, I_o e^{-jkr}}{r}\int_{-l/2}^{l/2} dz'$$

Una vez realizada la integración con respecto a $z'$, la expresión final para el potencial vector debido a un dipolo elemental en el origen viene dada por

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} l\, I_o \frac{e^{-jkr}}{r}\mathbf{u}_z \tag{8.6}$$

Conviene repasar las hipótesis que nos han permitido llevar a cabo las aproximaciones para obtener esta expresión del potencial vector:

a) El punto donde evaluamos los campos está muy alejado del dipolo, es decir

$$r \gg l$$

o lo que es igual, el tamaño del dipolo es muy pequeño comparado con la distancia a la cual evaluamos los campos.

b) La longitud de onda del campo oscilante es mucho mayor que el tamaño del dipolo, es decir

$$\lambda \gg l$$

En caso de no verificarse estas condiciones, la expresión (8.6) obtenida para el potencial vector no es válida y tampoco lo serán las expresiones para los campos que se derivan a continuación.

## 2.1. Campos de un dipolo oscilante

El campo magnético de un dipolo corto se obtiene a partir del rotacional del potencial vector obtenido en el apartado anterior. Por conveniencia, vamos a obtener los campos en coordenadas esféricas y para ello expresamos dicho potencial en estas coordenadas. Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \cos\theta - \mathbf{u}_\theta \operatorname{sen}\theta$$

vemos que no hay componente $\mathbf{u}_\varphi$ lo cual es lógico ya que la simetría del dipolo es cilíndrica. En consecuencia, las componentes del potencial vector son

$$\begin{aligned} \widehat{A}_r &= \frac{\mu_o}{4\pi}\, l\, I_o \frac{e^{-jkr}}{r}\cos\theta \\ \widehat{A}_\theta &= -\frac{\mu_o}{4\pi}\, l\, I_o \frac{e^{-jkr}}{r}\operatorname{sen}\theta \\ \widehat{A}_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Y el campo magnético, utilizando el rotacional en coordenadas esféricas, viene dado por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\mu_o}\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_o}\left\{\mathbf{u}_r \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}A_\varphi \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\theta\right)\right. \\ &\left. + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right) + \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)\right\} \end{aligned}$$

Como $A_\varphi = 0$ y las componentes $A_r$ y $A_\theta$ no dependen de la coordenada $\varphi$ (simetría cilíndrica), nos queda

$$\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\varphi \frac{l\, I_o}{4\pi}\frac{1}{r}\left(-\frac{\partial}{\partial r}(\operatorname{sen}\theta e^{-jkr}) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\cos\theta\right)\right)$$

Realizando las derivadas indicadas obtenemos

$$\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\varphi \frac{l\, I_o}{4\pi} \frac{1}{r} \left( jk \operatorname{sen}\theta e^{-jkr} + \frac{e^{-jkr}}{r} \operatorname{sen}\theta \right)$$

Finalmente, sacando factor común $\operatorname{sen}\theta e^{-jkr}$, multiplicando y dividiendo por $jk$ y operando, la expresión para la intensidad de campo magnético queda de la forma siguiente

$$\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\varphi \frac{l\, I_o}{4\pi} k^2 \operatorname{sen}\theta e^{-jkr} \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right] \tag{8.8}$$

Vemos que el campo magnético es perpendicular la dirección de propagación y consta de dos términos. El término proporcional a $1/r$ se ha obtenido a través de la derivada de la exponencial que tiene en cuenta la fase.

El campo eléctrico lo obtenemos a partir del campo magnético. Como éste sólo tiene componente $\mathbf{u}_\varphi$, tenemos

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon_o} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_o} \left[ \mathbf{u}_r \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} H_\varphi \operatorname{sen}\theta \right) - \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right) \right]$$

Sustituyendo la expresión para $\widehat{H}_\varphi$ dada por (8.8) y realizando operaciones,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \;=\; & \frac{1}{j\omega\varepsilon_o} \frac{l\, I_o}{4\pi} \left\{ -\mathbf{u}_r \frac{k^2}{r} 2\cos\theta e^{-jkr} \left( \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \right. \\ & \left. + \mathbf{u}_\theta \frac{k^2}{r} \operatorname{sen}\theta e^{-jkr} \left( -jk \left( \frac{1}{jk} + \frac{1}{r(jk)^2} \right) - \frac{1}{(jk)^2 r^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Sacando factor común $jk$ en el numerador y operando, las componentes del campo eléctrico quedan de la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \widehat{E}_r &= \frac{k^3}{\omega\varepsilon_o} \frac{l\, I_o}{2\pi} \cos\theta e^{-jkr} \left( \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right) \\ \widehat{E}_\theta &= \frac{k^3}{\omega\varepsilon_o} \frac{l\, I_o}{4\pi} e^{-jkr} \operatorname{sen}\theta \left( \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right) \\ \widehat{E}_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Las expresiones, tanto para el campo eléctrico como para el magnético, presentan distintos términos en potencias de $kr$. Esta dependencia con respecto a la distancia $r$ sugiere la definición de tres zonas distintas:

a) **Zona de radiación**. Corresponde a puntos muy alejados del dipolo ($kr \gg 1$). En esta zona los términos significativos en la expresión de los campos son los términos en $1/kr$. El resto de los términos se pueden despreciar porque el valor de los campos cae rápidamente con la distancia.

b) **Zona cuasi-estática**. Corresponde a puntos próximos al dipolo. En esta zona los términos significativos son los de mayor exponente, es decir, el término en $1/(kr)^2$ para el campo magnético y los términos en $1/(kr)^3$ para el campo eléctrico. A su vez, la exponencial se puede aproximar por la unidad con lo que los campos magnético y eléctrico se pueden aproximar por los obtenidos mediante la ley de Biot y Savart y la ley de Coulomb.

c) **Zona de transición** también conocida como **zona de inducción**. Aquí ninguna de las aproximaciones anteriores resulta posible y deben conservarse todos los términos. El campo de transición, término en $1/(kr)^2$ en (8.9), aunque no contribuye a la radiación de energía, si contribuye al almacenamiento de energía durante la oscilación y cobra importancia en la zona intermedia.

Las contribuciones de los campos correspondientes a las zonas cuasi-estática y de inducción son despreciables en puntos alejados del dipolo, su radio de influencia se limita al entorno más próximo del dipolo y no intervienen en la transmisión de energía a larga distancia. Por este motivo, nuestro interés se centra en los campos de radiación.

### *Campos de radiación*

Como se ha comentado más arriba, la zona de radiación corresponde a puntos muy alejados del dipolo ($kr \gg 1$) donde se pueden despreciar los términos en $1/(kr)^2$ y $1/(kr)^3$ de las expresiones generales (8.8) y (8.9). Las expresiones para los campos de radiación son,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{u}_\varphi \frac{l\, I_o}{4\pi} \frac{jk}{r} e^{-jkr} \operatorname{sen}\theta \\ \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{u}_\theta \frac{1}{\omega \varepsilon_o} \frac{l\, I_o}{4\pi} \frac{jk^2}{r} e^{-jkr} \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{8.10}$$

Observamos que en la **zona de radiación** los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación y que

están en fase. Si tenemos en cuenta que,

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_o \mu_o} \qquad \text{y} \qquad Z_o = \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}\right)^{1/2}$$

podemos expresar el campo eléctrico como sigue,

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\theta \, Z_o \frac{l \, I_o}{4\pi} \frac{jk}{r} e^{-jkr} \operatorname{sen}\theta \tag{8.11}$$

Es decir, la relación entre sus módulos es igual a la impedancia característica del medio.

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = Z_o$$

Así pues, es posible expresar el campo eléctrico en función del magnético y viceversa,

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z_o}\mathbf{u}_r \times \widehat{\mathbf{E}} \qquad \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -Z_o \mathbf{u}_r \times \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

A la distribución espacial de los campos corresponde una fase, dada por el término $e^{-jkr}$, cuya constante de propagación está relacionada con la longitud de onda por la relación siguiente,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} = \frac{c}{f}$$

Podemos observar que las características de los campos de radiación de un dipolo elemental son las mismas que vimos en el tema 5 para una onda plana que se propaga en el vacío.

## 2.2. Potencia radiada por un dipolo corto

La potencia promedio radiada por un dipolo situado en el origen se obtiene integrando el valor promedio del vector de Poynting sobre una esfera de radio $r \gg l$ y cuyo centro es el origen de coordenadas. Como sabemos, el valor promedio del vector de Poynting, también denominado **densidad de potencia**, se obtiene aplicando las relación (4.51) y la definición (4.50),

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\Re(\widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}}^*)$$

Se deja como ejercicio comprobar que la parte real del vector complejo de Poynting es debida a los términos correspondientes a la zona de radiación, es decir, aquellos que varían según $1/r$. Por tanto, además de que los campos de radiación son los únicos que tienen valores apreciables a grandes distancias de la fuente, desde el punto de vista del flujo de energía por unidad de tiempo que atraviesa una esfera centrada en el dipolo, sólo los términos correspondientes a los campos que varían como $1/r$ contribuirán a un flujo medio de potencia radiada no nulo.

Esta conclusión, a la que hemos llegado desde un punto de vista analítico, no es exclusiva del caso particular del dipolo oscilante, como se puede comprobar con el siguiente razonamiento: Si consideramos dos superficies concéntricas de radios $R_1$ y $R_2$, que encierran a la fuente, evidentemente la velocidad del flujo medio de energía a través de la superficie de radio $R_1$ debe ser la misma que para la de radio $R_2$ (supuesto el medio no disipativo), pues de lo contrario habría acumulación (o disipación) de la energía radiada en el espacio entre las dos superficies consideradas. En consecuencia se requiere que el flujo promedio de potencia disminuya como $1/r^2$, ya que el área de la superficie crece según $r^2$. Por tanto, los términos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ que contribuyen a la densidad promedio de potencia radiada deben ser proporcionales a $1/r$, independientemente de la frecuencia y de la geometría de la distribución de corrientes que originaron el campo electromagnético que se propaga. Las componentes de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ que sean proporcionales a $1/r^2$ o $1/r^3$ dan cuenta de la energía almacenada en el campo, es decir, es la energía que sale de la fuente y vuelve a la misma periódicamente, sin que jamás se pierda para el sistema.

Teniendo en cuenta el razonamiento anterior y sustituyendo las expresiones para los campos de radiación en la ecuación para el valor promedio del vector de Poynting, tenemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2}\Re\left\{ \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{u}_\varphi \left( Z_o \frac{l\, I_o}{4\pi} e^{jkr} \operatorname{sen}\theta \; \frac{jk}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{l\, I_o}{4\pi} \operatorname{sen}\theta e^{jkr} \; \frac{-jk}{r} \right) \right\}\end{aligned}$$

operando resulta

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\mathbf{u}_r \, Z_o \left( \frac{l\, I_o}{4\pi} \right)^2 \frac{k^2}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta \tag{8.12}$$

Entonces, la potencia promedio radiada a través de una esfera de radio $r$ centrada

en el dipolo será

$$\langle P\rangle = \int \langle \mathbf{S}\rangle \cdot d\mathbf{s}$$

donde $ds = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$ es el elemento diferencial de superficie. Sustituyendo la expresión para $\langle \mathbf{S}\rangle$ e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle P\rangle &= \frac{1}{2}\int (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r) Z_o \left(\frac{l\, I_o}{4\pi}\right)^2 \frac{k^2}{r^2} \operatorname{sen}^3\theta\; r^2\, d\theta\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2} Z_o k^2 \left(\frac{l\, I_o}{4\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\; d\theta \\
&= \frac{1}{2} 2\pi Z_o k^2 \left(\frac{l\, I_o}{4\pi}\right)^2 \left[-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - \frac{2}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$\langle P\rangle = \frac{1}{12\pi} Z_o k^2 \,(l\, I_o)^2 \tag{8.13}$$

Este resultado nos muestra que la potencia radiada no depende de la distancia, siempre que se cumplan las aproximaciones que hemos utilizado y que la radiación se propague en el vacío o en un medio no disipativo. También podemos comprobar que depende del cuadrado de la frecuencia a traves de $k = \omega/c$ y del cuadrado de la amplitud de la corriente que alimenta al dipolo.

Resumiendo lo visto en este apartado, el dipolo genera una onda que se propaga transportando energía. La onda no se atenuará salvo que se produzca transferencia de energía mediante interacción con partículas cargadas o que se propague en un medio material con pérdidas. Los campos que constituyen esta onda y que se denominan campos de radiación son únicamente aquellos proporcionales a $1/r$ ya que son los únicos que pueden transmitir energía (y por tanto, información) a puntos alejados del dipolo.

En conclusión, desde un punto de vista clásico, la generación y propagación de ondas se pueden explicar mediante la aplicación de las ecuaciones de Maxwell. Su comprobación experimental por Hertz supuso la confirmación del modelo de comportamiento del campo electromagnético propuesto por Maxwell.

En la figura 8.3 se muestra un esquema de las líneas de campo eléctrico debidas a un dipolo corto como el analizado en este apartado.

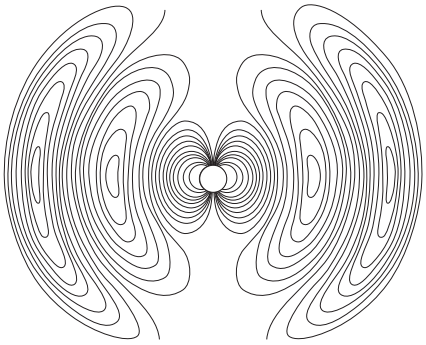


Figura 8.3. Líneas de campo eléctrico que rodean
a un dipolo oscilante en un instante dado

## 3. ANTENAS

Como se ha comentado en la introducción, una antena es un dispositivo diseñado para radiar (o recibir) energía con la mayor efectividad posible. La antena actúa como un transductor entre un campo electromagnético guiado y un campo que se propaga en el espacio libre. La antena puede ser considerada en su doble faceta, como sistema radiante y como elemento de circuito y, en consecuencia, sus parámetros característicos que vamos a definir a continuación, serán los determinados por esta doble función.

### *Diagrama de radiación*

El diagrama de radiación de una antena es una representación gráfica, en tres dimensiones, que muestra la densidad de potencia en función de una dirección especificada por el ángulo polar $\theta$ y el ángulo azimutal $\varphi$. En virtud del teorema de reciprocidad[2], una antena tiene el mismo diagrama de radiación cuando opera como emisora o como receptora. En este último caso, el diagrama de radiación nos informa de la densidad de potencia que recibe la antena de cada dirección del espacio.

En la figura 8.4 se muestran los diagramas de radiación de algunas antenas. En particular, la figura 8.4(a) muestra el diagrama de radiación correspondiente

[2] Ver apéndice A

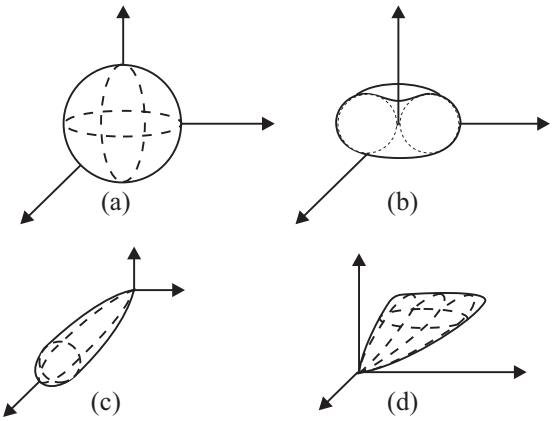



Figura 8.4. Diagramas de radiación para distintas antenas: a) Isotrópica; b) Omnidireccional; c) de radiación fina y d) tipo cosecante

a una hipotética **antena isotrópica**. Una antena de estas características no es realizable en la práctica, pero es de interés su utilización como referencia. Una **antena omnidireccional**, figura 8.4(b), es la que tiene iguales amplitudes en todas las direcciones de un plano que corta a la antena. El plano omnidireccional es usualmente el horizontal para los sistemas de comunicación. Una antena de **radiación fina**, figura 8.4(c), es aquella cuyo diagrama de radiación consta de un lóbulo principal relativamente estrecho, con sección transversal circular. Por último, existen algunas antenas que no tienen un eje de simetría, tal como la antena **tipo cosecante** mostrada en la figura 8.4(d), en la que el diagrama admite un plano de simetría y en este plano dicho diagrama varía según la función prescrita.

En general, los diagramas de radiación de la mayoría de las antenas contienen un lóbulo principal y varios lóbulos de menor amplitud, llamados lóbulos laterales o secundarios.

Un diagrama completo de radiación, para todo ángulo $\theta$ y $\varphi$ requiere una representación tridimensional que es difícil visualizar gráficamente. Por este motivo generalmente se representan secciones del diagrama por planos de interés, que frecuentemente son los diagramas horizontal ($\theta = 90°$) y vertical ($\varphi$ constante).

Consideremos una antena situada en el origen de coordenadas y una esfera de radio $r$ mucho mayor que las dimensiones de la antena tal y como muestra la figura 8.5. La potencia promedio radiada por la antena a través de un área

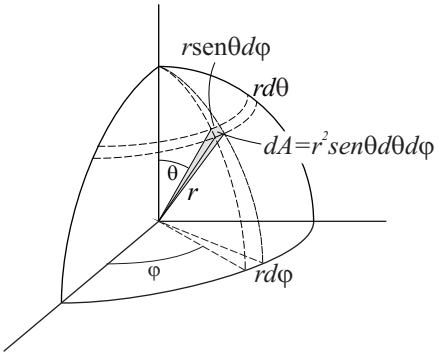



Figura 8.5. Definición de ángulo sólido

elemental $d\mathbf{A}$ de dicha esfera será

$$dP_{rad} =< \mathbf{S} > \cdot d\mathbf{A} =< \mathbf{S} > \cdot \mathbf{u}_r dA$$

En la región de campo lejano, que es la que nos interesa, el vector de Poynting de cualquier antena siempre tendrá dirección radial, por tanto

$$dP_{rad} = SdA = Sr^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$$

En esta expresiones, tanto $P_{rad}$ como $S$ hacen referencia a los valores promedios. En adelante seguiremos usando esta descripción para simplificar la notación. El ángulo sólido diferencial asociado al área elemental $dA$ se define como el cociente entre dicho área y el cuadrado de la distancia al origen, esto es

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}$$

y se mide en estereorradianes. Teniendo en cuenta lo anterior, se define la **intensidad de radiación** como la potencia promedio radiada por una antena por unidad de ángulo sólido, esto es

$$I = \frac{dP_{rad}}{d\Omega} = Sr^2 \tag{8.14}$$

Así, el diagrama de radiación de cualquier antena se describe en función de la **intensidad de radiación normalizada** $F(\theta, \varphi)$ que se define como la razón

entre la intensidad de radiación en una dirección cualquiera y la intensidad de radiación máxima, $I_{max}$.

$$F(\theta,\varphi) = \frac{I(\theta,\varphi)}{I_{max}} = \frac{S(\theta,\varphi)}{S_{max}} \tag{8.15}$$

y coincide con el cociente entre la densidad de potencia $S(r,\theta,\varphi)$ y la densidad de potencia máxima $S_{max}$ para un valor de $r$ determinado.

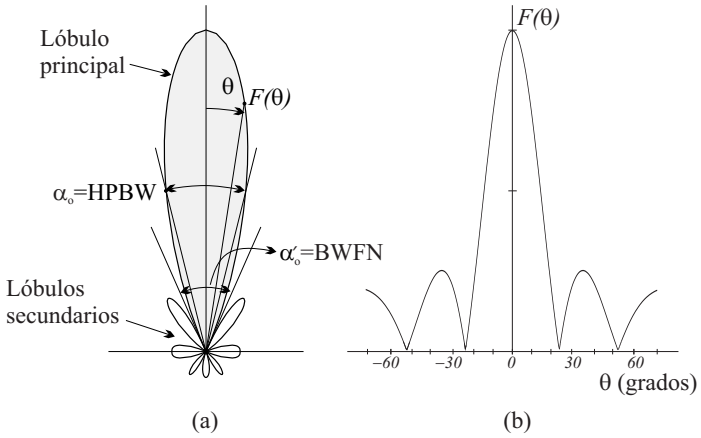



Figura 8.6. Diagrama de radiación normalizado de una antena en a) forma polar y b) forma rectangular

En la figura 8.6(a) se muestra el diagrama de radiación normalizado en coordenadas polares para una antena con un lóbulo principal y varios lóbulos laterales y posteriores. En la figura 8.6(b) se muestra el mismo diagrama en coordenadas rectangulares.

**Ejercicio de autoevaluación 8.1**

Obtener la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y la intensidad de radiación normalizada para el dipolo corto estudiado en apartados anteriores

**Solución**

Para el dipolo hertziano, la densidad de potencia viene dada por

$$S = \frac{1}{2} Z_o \left( \frac{l\, I_o}{4\pi} \right)^2 \frac{k^2}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta$$

Y la potencia radiada por unidad de ángulo sólido o intensidad de radiación será

$$I = Sr^2 = \frac{1}{2} Z_o \left( \frac{l\, I_o}{4\pi} \right)^2 k^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

El valor máximo de la intensidad de radiación se dará para $\operatorname{sen} \theta = 1$, y por tanto, la intensidad de radiación normalizada para el dipolo corto es

$$F(\theta) = \operatorname{sen}^2 \theta$$

### *Ángulo sólido patrón*

El ángulo sólido patrón $\Omega_P$ de una antena con un único lóbulo principal se define como la integral de la intensidad de radiación normalizada sobre una esfera

$$\Omega_P = \int F(\theta, \varphi) d\Omega \tag{8.16}$$

El ángulo sólido del haz define un cono equivalente sobre el cual toda la radiación de la antena se concentra con intensidad igual a la máxima del diagrama real, véase la figura 8.7.

Este parámetro caracteriza el diagrama de radiación tridimensional

### *Anchura del lóbulo principal*

Otro parámetro útil para caracterizar el diagrama de radiación de una antena es la anchura del lóbulo principal que puede definirse de dos formas:

a) Como la anchura del haz entre los dos primeros nulos (Beam Width First Nulls, BWFN) que es el ángulo $\alpha'_o$ que determina las direcciones de los nulos adyacentes al lóbulo principal (Véase la figura 8.6(a)).

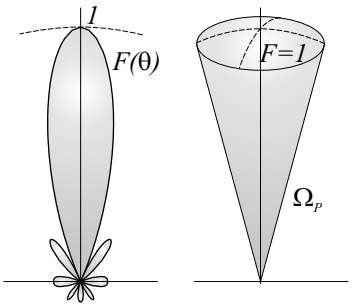



Figura 8.7. Angulo sólido patrón

b) O bien, la más frecuente, como la anchura del haz a media potencia (Half Power Beam Width, HPBW) que es el ángulo determinado por las direcciones que marcan la emisión de la mitad de la potencia máxima, es decir, a 3 dB del máximo.

La anchura del lóbulo principal es un parámetro que nos informa de la resolución de una antena, es decir, de la mínima separación angular que tiene que haber entre dos fuentes para que pueden ser diferenciadas por una antena cuando actúa como receptora.

### *Nivel lóbulos secundarios*

Como ya hemos dicho, es prácticamente imposible tener un diagrama de antena sin lóbulos secundarios. Es indispensable a efectos de evitar errores de interpretación en las medidas realizadas, conocer la importancia de la amplitud máxima de estos lóbulos secundarios, al menos del primero que es, en general, el más importante.

Para ello se define el nivel de un lóbulo lateral (o secundario) como la razón, expresada en decibelios, entre la amplitud máxima del lóbulo principal y la amplitud máxima del lóbulo secundario en cuestión. En cualquier estudio previo de diseño de antenas se intentará, en la medida de lo posible, disminuir lo más posible los lóbulos secundarios.

### *Directividad*

La directividad de una antena es una medida de las propiedades direccionales o de la concentración relativa de potencia radiada en diferentes direcciones y se define como el cociente entre la intensidad de radiación máxima normalizada, $F_{max}$ (que por definición es igual a la unidad) y el valor promediado a toda la esfera de la intensidad de radiación normalizada.

$$D = \frac{1}{\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} F(\theta.\varphi)d\Omega} = \frac{4\pi}{\Omega_P} \tag{8.17}$$

donde $\Omega_P$ es el ángulo sólido patrón definido por la ecuación (8.16). Por tanto, cuanto más estrecho sea $\Omega_P$ mayor será la directividad de la antena. Para una antena isotrópica $\Omega_P = 1$ y, por tanto, la directividad es la unidad ,$D_{\text{iso}} = 1$.

Teniendo en cuenta la expresión (8.15) la directividad se expresa como

$$D = \frac{S_{max}}{\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} S(\theta,\varphi)d\Omega} = \frac{S_{max}}{S_{prom}}$$

donde $S_{prom}$ es el valor promediado a toda la esfera de la densidad de potencia radiada y es igual a la potencia total radiada por la antena dividida entre el área de una esfera de radio $r$. En consecuencia, podemos excribir

$$D = \frac{4\pi r^2 S_{max}}{P_{rad}} \tag{8.18}$$

### *Ganancia de una antena*

De la potencia total suministrada a la antena que designaremos por $P_t$, una parte es radiada hacia el espacio, $P_{rad}$, y otra parte, $P_{per}$, se disipa como calor en la estructura de la antena. La **eficiencia de radiación** $\xi$ se define como la razón entre la potencia radiada y la potencia total suministrada a la antena.

$$\xi = \frac{P_{rad}}{P_t} \tag{8.19}$$

La **ganancia de una antena** se define como la razón entre la máxima densidad de potencia radiada $S_{max}$ y la densidad de potencia que radiaría una antena isotrópica ideal (sin pérdidas) que denotamos con $S_t$, esto es

$$G = \frac{S_{max}}{S_t} = \frac{4\pi r^2 S_{max}}{P_t} \tag{8.20}$$

Podemos ver que esta expresión es semejante a (8.18) con la diferencia de que se refiere a la potencia de entrada a la antena, $P_t$. De acuerdo con la definición de eficiencia, tenemos entonces la siguiente relación entre ganancia y directividad

$$G = \xi D \tag{8.21}$$

### *Resistencia de radiación*

Para una línea de transmisión conectada a una antena, ésta es simplemente una impedancia. Podemos considerar que la parte real de esta impedancia está compuesta por una resistencia que llamamos **resistencia de radiación** $R_{rad}$ más una resistencia de pérdidas $R_{per}$. La resistencia de radiación se define como la resistencia equivalente que disiparía una cantidad de potencia igual a la potencia total radiada. Por tanto

$$R_{rad} = 2\frac{P_{rad}}{I_o^2} \tag{8.22}$$

mientras que

$$R_{per} = \frac{P_{per}}{I_o^2} \tag{8.23}$$

donde $I_o$ es la amplitud de la corriente sinusoidal que excita la antena. En términos de la corriente eficaz, tendremos

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I_e^2}$$

y

$$R_{per} = \frac{P_{per}}{I_e^2}$$

Recordemos que en estas expresiones $P_{rad}$ y $P_{per}$ son potencias promediadas temporalmente puesto que estamos tratando señales sinusoidales. La eficiencia de radiación, de acuerdo con su definición en (8.19) se puede expresar en función de la resistencia de pérdidas y de la resistencia de radiación como sigue

$$\xi = \frac{P_{rad}}{P_t} = \frac{P_{rad}}{P_{rad} + P_{per}} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{per}} \tag{8.24}$$

## 3.1. Antena lineal

Como hemos visto en la sección 1, la determinación de los campos **E** y **H** debidos a un sistema radiante requiere conocer la distribución de corrientes del

sistema puesto que ésta constituye la fuente de los campos. En una antena real, las distribuciones de corriente son, en general, muy complejas y la resolución analítica no es posible. En este apartado vamos a estudiar el caso simplificado de la antena lineal alimentada en el centro.

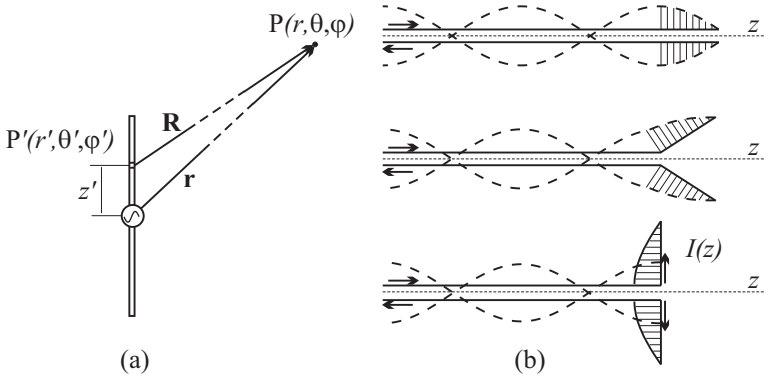



Figura 8.8. Antena lineal formada por una linea de transmisión abierta

Los estudios experimentales muestran que las distribuciones de corriente en una antena lineal son aproximadamente ondas sinusoidales estacionarias, siempre que la antena sea muy delgada. Cualitativamente, una antena lineal abierta como la mostrada en la figura 8.8(a) puede considerarse como una línea de transmisión abierta (figura 8.8(b)), mientras que una antena circular (o de lazo) mostrada en la figura 8.9 puede considerarse como una línea de transmisión cortocircuitada.

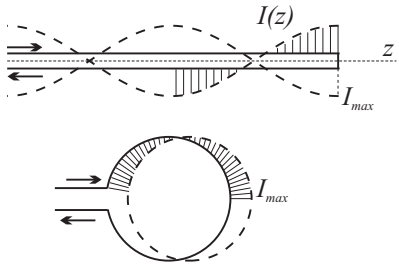



Figura 8.9. Antena de lazo formada por
una línea de transmisión cortocircuitada

Para la determinación de los campos haremos uso de los resultados obtenidos para el dipolo corto y consideraremos la antena lineal como un conjunto de dipolos

hertzianos alineados de forma que el campo radiado por la antena vendrá dado por la suma de las contribuciones debidas a estos dipolos. Los resultados que se obtienen con este modelo simplificado para el cálculo de los campos de radiación son consistentes con los experimentales, a pesar de las desviaciones introducidas por factores como la disipación debido al efecto Joule, la eficiencia de la antena, la capacidad antena-tierra, etc.

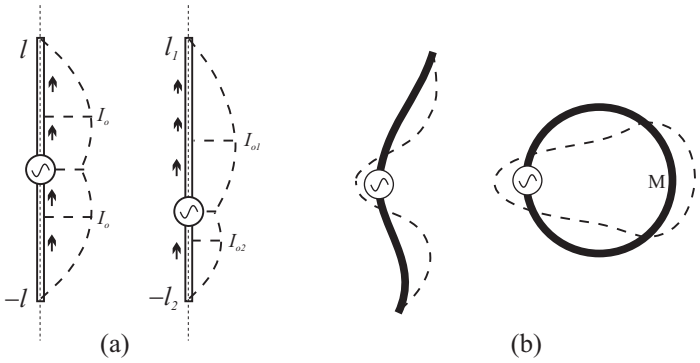



Figura 8.10. Ejemplos de antenas lineales y circulares

En la figura 8.10(a) se muestran ejemplos de antenas lineales alimentadas por una fuente sinusoidal y las correspondientes ondas estacionarias de corriente. Estas ondas estacionarias se obtienen aplicando las siguientes reglas:

a) El flujo de corriente a través de la fuente de alimentación debe ser continuo. Esto se deduce del hecho de que toda la corriente que sale de la fuente por un terminal debe entrar por el otro.

b) Si los extremos de la antena están abiertos, la corriente en los extremos debe anularse. Esto es consecuencia de la conservación de la carga.

c) Las distribuciones de corriente a ambos lados del generador deben ser ondas sinusoidales estacionarias con un factor de fase constante $k = \omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}$. Por tanto, el fasor de corriente debe ser de la forma

$$\widehat{I}(z') = I_o^+ e^{-jkz'} + I_o^- e^{jkz'}$$

y debe satisfacer las condiciones de contorno que requieren de las reglas (a) y (b).

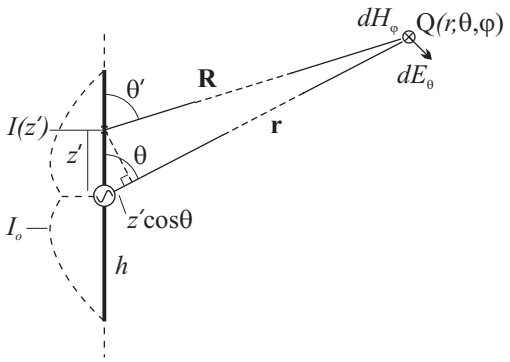



Figura 8.11. Antena lineal alimentada en su centro por una señal sinusoidal

Estas reglas, aplicadas a una antena lineal alimentada en su punto medio como la mostrada en la figura 8.11 conducen a la siguiente distribución de corriente:

$$\widehat{I}(z') = \begin{cases} I_o \operatorname{sen} k(l - z') & 0 < z' < l \\ \\ I_o \operatorname{sen} k(l + z') & -l < z' < 0 \end{cases} \tag{8.25}$$

donde $I_o$ es la amplitud máxima de corriente.

Las ondas estacionarias dadas por (8.25) son continuas en el punto en que se localiza el generador, $z' = 0$, de acuerdo con la regla (a) y se anulan en los extremos de la antena, $z' = \pm l$, como requiere la regla (b). Si el generador no se pone en el centro, como muestra la figura 8.10(a), se producen ondas estacionarias de corriente no simétricas. Las reglas aplicadas a este caso nos proporcionan la siguiente distribución de corriente

$$\widehat{I}(z') = \begin{cases} I_{o1} \operatorname{sen} k(l_1 - z') & 0 < z' < l_1 \\ \\ I_{o2} \operatorname{sen} k(l_2 + z') & -l_2 < z' < 0 \end{cases}$$

Igualmente, cabe esperar que también existan distribuciones de corriente estacionarias en una antena lineal delgada cuando es curva, como la representada en la figura 8.10(b). En este caso, la distribución (8.25) puede considerarse una buena aproximación si la variable $z'$ se cambia por $\varrho'$ que representa la distancia media a lo largo del eje curvado de la antena.

En la figura 8.10*b* podemos observar el efecto producido cuando unimos los terminales de una antena formando una curva cerrada. La onda estacionaria de corriente se puede predecir mediante un cambio en la regla (b):

b) En lugar de que la corriente se anule en los extremos de la antena, deberá ser continua en el punto M y simétrica respecto de él.

Consideremos el caso simplificado de una antena lineal de longitud $l = 2h$ alimentada en su centro y con una distribución de corriente dada por (8.25). La contribución al campo eléctrico total en un punto campo Q debida a un elemento de corriente $I(z')dz'$ viene dada por

$$d\widehat{E}_\theta = jZ_o \frac{k\widehat{I}(z')dz' \operatorname{sen}\theta'}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R}$$

donde $R$, de acuerdo con la figura 8.11, viene dado por

$$R = r - z' \cos\theta$$

De manera que el campo eléctrico total se obtiene integrando en toda la longitud de la antena

$$\widehat{E}_\theta = \frac{jkZ_o}{4\pi} e^{-jkr} \int_{-h}^{h} \frac{\operatorname{sen}\theta' \widehat{I}(z')dz'}{[r - z'\cos\theta]} e^{jkz'\cos\theta} \tag{8.26}$$

Ahora bien, puesto que estamos considerando únicamente la zona de campo lejano, o zona de radiación, la distancia $R$ entre el elemento de corriente y el punto de observación es muy grande comparada con la longitud de la antena, $R \gg l$ y por tanto, podemos aproximar el denominador de (8.26) por $r$, y por la misma razón, podemos considerar que $\theta' \simeq \theta$. Sin embargo, la exponencial de esta expresión debemos tratarla con más cuidado. El factor $e^{jkz'\cos\theta}$ da cuenta de las contribuciones a la fase de cada elemento de campo $dE_\theta$ en el punto Q, y por tanto, la integral es muy sensible a pequeños cambios de la exponencial por lo que no podemos hacer ninguna aproximación. Teniendo en cuenta lo anterior, queda la siguiente expresión para el campo eléctrico

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\theta &= \frac{jkZ_oI_o \operatorname{sen}\theta\ e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ \int_{-h}^{0} e^{jkz'\cos\theta} \operatorname{sen} k(h + z')dz' + \right. \\ &+ \left. \int_{0}^{h} e^{jkz'\cos\theta} \operatorname{sen} k(h - z')dz' \right] \end{aligned}$$

Integrando por partes y operando obtenemos

$$\widehat{E}_\theta = \frac{jZ_oI_o}{2\pi r}e^{-jkr}\left[\frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos kh}{\operatorname{sen}\theta}\right] \tag{8.27}$$

mientras que el campo magnético viene dado por

$$\widehat{H}_\varphi = \frac{\widehat{E}_\theta}{Z_o}$$

De estas expresiones se deducen las siguientes propiedades de los campos de radiación

- El campo electromagnético en la zona de campo lejano es una onda esférica TEM. La relación entre las amplitudes de los campos viene dada por la impedancia intrínseca del medio y las amplitudes de **E** y **H** disminuyen con $1/r$
- Los campos son directamente proporcionales a la amplitud de la corriente de excitación de la antena, $I_o$.
- **E** y **H** son independientes del ángulo azimutal $\varphi$, es decir, el campo de radiación tiene simetría axial y la dependencia con el ángulo polar $\theta$, queda recogida en el siguiente factor:

  $$f(\theta) = \frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos kh}{\operatorname{sen}\theta} \tag{8.28}$$

  que se denomina **factor de antena** y especifica cómo varían los campos con el ángulo polar $\theta$, en la zona lejana.

La potencia promedio total radiada por una antena lineal vendrá dada por

$$P = \frac{Z_oI_o^2}{4\pi}\int_0^\pi [f(\theta)]^2\operatorname{sen}\theta d\theta \tag{8.29}$$

Esta expresión no es integrable analíticamente y debe ser evaluada por métodos numéricos.

Merece estudio especial aquellas antenas lineales cuya longitud es un múltiplo par o impar de semilongitudes de onda, es decir, $l = m\lambda/2$. En este caso, se obtienen las siguientes expresiones para los campos

$$\widehat{E}_\theta = \frac{jZ_oI_o}{2\pi r}e^{-jkr}\left[\frac{\cos\left(m\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right] \qquad \text{para} \quad m \text{ impar}$$

$$\widehat{E}_\theta = \frac{jZ_oI_o}{2\pi r}e^{-jkr}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right] \qquad \text{para} \quad m \text{ par}$$

En la figura 8.12 se muestran algunos diagramas de radiación para antenas lineales con distintos valores de $m$.

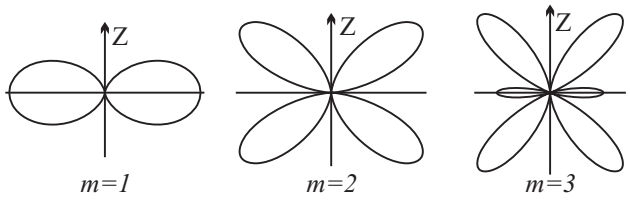



Figura 8.12. Diagramas de radiación para diversos valores de $m$

### *Antena de media longitud de onda*

Una de las antenas lineales más usuales es aquella cuya longitud es igual a media longitud de onda. Para este caso, $h = \lambda/4$, tenemos el siguiente valor para la intensidad de campo eléctrico

$$\widehat{E}_\theta = \frac{j60I_o}{r}e^{-jkr}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right] \tag{8.30}$$

donde se ha tomado el valor de $Z_o$ para el vacío, $Z_o = 120\pi$. El valor medio del vector de Poynting viene dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{15I_o^2}{\pi r^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\theta}\right]^2 \mathbf{u}_r \tag{8.31}$$

y la potencia total radiada

$$P_{rad} = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{s} = 60I_o^2 \int_0^\pi \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]^2}{\operatorname{sen}\theta} d\theta \tag{8.32}$$

que, después de evaluar la integral anterior, da como resultado

$$P_{rad} = 36{,}56I_o^2$$

En consecuencia, la resistencia de radiación

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_o^2} = 73{,}1\ \Omega \tag{8.33}$$

y la directividad,

$$D_{1/2} = 1{,}64 \tag{8.34}$$

Por tanto, la antena de media longitud de onda da un diagrama discretamente direccional y se utiliza cuando su radiación debe aprovecharse por igual en todas las direcciones de un plano. En general, y como veremos más adelante, para sistemas directivos, esta antena se usará agrupada con otras similares.

### 3.2. Antena de cuadro

Este tipo de antena consiste en un conductor que se cierra en lazo como se mostró en la figura 8.9. La aplicación más frecuente de esta antena es su uso como receptora y se emplea especialmente como sonda para medir el campo magnético. Por este motivo, generalmente sus dimensiones son pequeñas. Si consideramos que las dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda, podemos suponer que la corriente es uniforme en todo el lazo.

Para evaluar los campos en la zona de radiación obtendremos previamente el valor del potencial vector dado por (8.3) particularizado a una corriente filamental, esto es

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi r} e^{-jkr} \oint_{espira} I_o \mathbf{u}_{\varphi'}\ e^{jk\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'} dl'$$

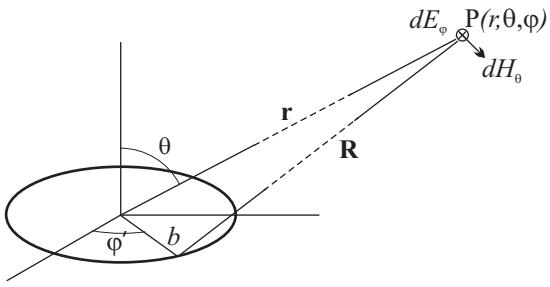



Figura 8.13. Antena de cuadro

Para evaluar el argumento de la exponencial de esta expresión tenemos en cuenta las expresiones para $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{r}'$ en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\mathbf{u}_y + \cos\theta\mathbf{u}_z \\ \mathbf{r}' &= b\left(\cos\varphi'\mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\varphi'\right)\mathbf{u}_y\end{aligned}$$

y realizamos el producto escalar

$$\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}' = b\left(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\cos\varphi' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi'\right) = b\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\varphi')$$

Entonces, el potencial vector queda

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_o b}{4\pi}I_o\frac{e^{-jkr}}{r}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\varphi'\ e^{jkb\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\varphi')}\mathbf{u}_{\varphi'}d\varphi' \\ &= \frac{\mu_o b}{4\pi}I_o\frac{e^{-jkr}}{r}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(kb\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\varphi')\right)\right. \\ &+ \left. j\operatorname{sen}\left(kb\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\varphi')\right)\right]\mathbf{u}_{\varphi'}d\varphi'\end{aligned}$$

Si se verifica que la longitud de onda de la señal es mucho mayor que el radio de la antena $\lambda \gg b$, entonces el argumento de las funciones coseno y seno es mucho menor que la unidad y podemos aproximar el coseno por la unidad y el seno por el argumento

$$\begin{aligned}\cos\left(kb\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\varphi')\right) &\simeq 1 \\ \operatorname{sen}\left(kb\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\varphi')\right) &\simeq kb\operatorname{sen}\theta\cos(\varphi-\varphi')\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_o b}{4\pi}I_o\frac{e^{-jkr}}{r}\int_0^{2\pi}\left[1+jx\cos(\varphi-\varphi')\right]\mathbf{u}_{\varphi'}d\varphi'$$

donde $x = kb\operatorname{sen}\theta$. Teniendo en cuenta que el vector unitario $\mathbf{u}_{\varphi'}$ en coordenadas cartesianas viene dado por

$$\mathbf{u}_{\varphi'} = -\operatorname{sen}\varphi'\mathbf{u}_x + \cos\varphi'\mathbf{u}_y$$

Es fácil comprobar que la integración del primer término es nula. La integración del segundo término es relativamente fácil teniendo en cuenta la expresión para el coseno de una diferencia y obtenemos

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_o b^2 k \operatorname{sen}\theta}{4} I_o \frac{e^{-jkr}}{r} \left[-\operatorname{sen}\varphi \mathbf{u}_x + \cos\varphi \mathbf{u}_y\right]$$

Luego el potencial vector en la zona de campo lejano para esta antena de cuadro de pequeñas dimensiones viene dado por la siguiente expresión

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_o b^2 k \operatorname{sen}\theta}{4} I_o \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{u}_\varphi \tag{8.35}$$

Una vez obtenida la expresión para el potencial vector, podemos derivar las expresiones para los campos

$$\widehat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \widehat{\mathbf{A}} \simeq \frac{k^2 b^2 I_o e^{-jkr} \operatorname{sen}\theta}{4r} \mathbf{u}_\theta \tag{8.36}$$

$$\widehat{\mathbf{E}} = \frac{-j}{\omega \varepsilon_o} \nabla \times \widehat{\mathbf{H}} \simeq \frac{Z_o k^2 b^2 I_o e^{-jkr} \operatorname{sen}\theta}{4r} \mathbf{u}_\varphi \tag{8.37}$$

El valor promedio del vector de Poynting para los campos radiados por la antena de lazo con la hipótesis de corriente constante es

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{H}^*} \right\} = \frac{Z_o (kb)^4 \operatorname{sen}^2\theta I_o^2}{32 r^2} \mathbf{u}_r \tag{8.38}$$

Y la potencia total radiada vendrá dada por

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \int \langle \mathbf{S} \rangle \, r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\pi Z_o \left(kb\right)^4 I_o^2}{16} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta d\theta \\ &= \frac{\pi Z_o \left(kb\right)^4 I_o^2}{12} \end{aligned} \tag{8.39}$$

Para el espacio libre, $Z_o = 120\pi$, obtenemos

$$P_{rad} = 10\pi^2 \left(kb\right)^4 I_o^2$$

La resistencia de radiación, en esta aproximación, vale

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_o^2} = 20\pi^2 \, (kb)^4$$

Y la directividad para esta antena valdrá

$$D_{lazo} = \frac{4\pi r^2 \, \langle \mathbf{S} \rangle_{\text{máx}}}{P_{rad}} = 1{,}5$$

Es importante resaltar que para esta antena los campos son, en su configuración, duales de los de un dipolo colocado según el eje Z. Podemos comprobar que el campo eléctrico y el campo magnético para la antena de lazo tienen las direcciones cambiadas con respecto a los campos del dipolo corto.

### 3.3. Antenas situadas frente a tierra

En la práctica, las antenas se encuentran a menudo en presencia de una superficie conductora aproximadamente plana que es, en general, la superficie de la tierra.

El campo electromagnético generado por la antena induce cargas y corrientes en esta superficie conductora. Por tanto, el campo total radiado por el sistema es el debido a todas las cargas y corrientes: las presentes en la antena y las inducidas en la superficie conductora. En el caso más general, la determinación del campo resultante, para una antena situada frente a una superficie conductora real, es muy complicada. Ahora bien, si hacemos la aproximación de considerar la tierra como conductor perfecto, la contribución al campo debido a las cargas y corrientes inducidas en la superficie conductora se puede calcular fácilmente aplicando el método de las imágenes. Los campos obtenidos con esta aproximación concuerdan bastante bien con los reales.

Como se muestra en la figura 8.14 el problema del comportamiento de una antena situada frente a tierra, considerada ésta como conductor plano perfecto, se resuelve considerando que el sistema formado por una distribución de cargas y corrientes reales y un plano conductor se puede sustituir por otro sistema equivalente constituido por la misma distribución de cargas y corrientes reales y sus imágenes correspondientes. Efectivamente, como se muestra esquemáticamente en la figura 8.15(a), si tenemos una distribución real de carga $\rho_o$, consideraremos otra distribución de carga imagen situada simétricamente respecto al plano de tierra

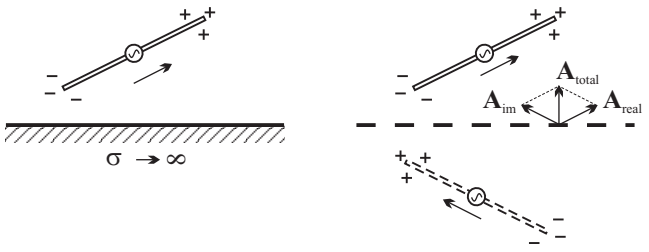



Figura 8.14. Antena situada frente a tierra

y de valor $\rho_i = -\rho_o$. De forma análoga, la densidad de corriente imagen $\mathbf{J}_i$ estará definida de forma tal que sea simétrica de la real, $\mathbf{J}_o$, respecto al plano $z = 0$ y con sentido opuesto. En la figura 8.15(b) y (c) se muestran dos posibilidadas.

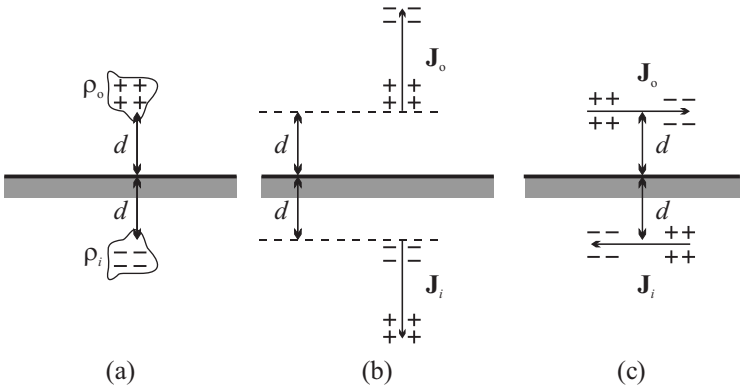



Figura 8.15. Distribuciones de carga y corrientes y sus imágenes correspondientes

Con estas distribuciones de carga y corrientes imagen, las expresiones de los potenciales en un punto P por encima de la superficie ($z > 0$) resultan

$$\widehat{V}(\mathbf{r}) = \widehat{V}_o + \widehat{V}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_V \widehat{\rho}_o \frac{e^{-jkr}}{r} dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{V_i} \widehat{\rho}_i \frac{e^{-jkr}}{r} dv'$$

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{A}}_o + \widehat{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V_a} \widehat{\mathbf{J}}_o \frac{e^{-jkr}}{r} dv' + \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V_i} \widehat{\mathbf{J}}_i \frac{e^{-jkr}}{r} dv'$$

Conocidos $\widehat{\mathbf{A}}$ y $\widehat{V}$, el campo eléctrico en el semiplano $z \geq 0$ viene dado por

$$\widehat{\mathbf{E}} = -\nabla\widehat{V} - j\omega\widehat{\mathbf{A}}$$

Si consideramos el punto P situado en $z = 0$, las distribuciones de carga iguales y opuestas, y están situadas a la misma distancia de P. Por ello, resulta $\widehat{V}(z = 0) = 0$ y, por tanto, $\nabla\widehat{V}$ es perpendicular al plano $z = 0$. Para las componentes del campo eléctrico, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_t &= 0 \\
\widehat{E}_n &= -\left(\nabla\widehat{V}\right)_n - j\omega\widehat{A}_n \\
&= -\left(\frac{\partial\widehat{V}_o}{\partial n} + \frac{\partial\widehat{V}_i}{\partial n}\right) - j\omega(\widehat{A}_{o,n} + \widehat{A}_{i,n})
\end{aligned}$$

Tal y como se desprende de la figura 8.14, se verifica que

$$\widehat{A}_{o,n} = \widehat{A}_{i,n}$$

y, además

$$\frac{\partial\widehat{V}_o}{\partial n} = \frac{\partial\widehat{V}_i}{\partial n}$$

debido a la simetría de la distribución de cargas reales e imagen. Por tanto, podemos concluir que

$$\widehat{E}_n = -2\left(\frac{\partial\widehat{V}_o}{\partial n} + j\omega\widehat{A}_{o,n}\right) = 2\widehat{E}_{o,n}$$

Es decir, la componente del campo normal a la superficie conductora en el semiespacio $z > 0$ es igual a dos veces la componente normal del campo debida a las cargas reales. De forma análoga, para el campo magnético, se llega a que

$$\widehat{B}_n = 0$$

y la componente tangencial

$$\widehat{B}_t = 2B_{o,t}$$

Como ejemplo, consideremos una antena lineal vertical de longitud $h$, alimentada por la base y situada sobre la superficie de la tierra, como se muestra en la figura 8.16. El campo de radiación existe solamente en la parte superior del espacio, donde es igual al campo creado por una antena de doble longitud y alimentada en el centro.

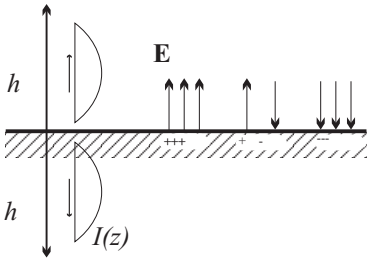



Figura 8.16. Antena de media longitud de onda situada frente a tierra

El campo eléctrico radiado por la antena, viene dado por la expresión (8.27) para todos los puntos por encima del plano de tierra ($0 < \theta < \pi/2$), y es nulo para todos los puntos situados por debajo ($\pi/2 < \theta < \pi$). Por tanto, para el cálculo de la potencia radiada, la integral de la ecuación (8.29) ha de extenderse únicamente desde cero hasta $\pi/2$, esto es

$$P = \frac{Z_o I_o^2}{4\pi} \int_0^{\pi/2} [F(\theta)]^2 \operatorname{sen}\theta \; d\theta$$

En resumen, podemos decir que, en el caso de una antena vertical de longitud $h$ situada frente a tierra, en el semiespacio en que se encuentra la antena real obtenemos el mismo diagrama de radiación que el producido por una antena de longitud $2h$ alimentada en su centro por la misma corriente. Sin embargo, la antena real de altura $h$ radia sólo en el semiespacio situado sobre el plano, de forma que su potencia radiada es solo la mitad de la correspondiente a la antena equivalente (de longitud $2h$) y en consecuencia la resistencia de radiación de la antena real es aproximadamente la mitad de la de aquella.

## 4. AGRUPACIONES DE ANTENAS LINEALES

En apartados anteriores hemos establecido las bases para el estudio de antenas lineales aisladas y hemos obtenido los parámetros en algunos casos concretos. Hemos visto que la directividad de las antenas lineales no es función del ángulo azimutal $\varphi$ y por ello se denominan antenas omnidireccionales. Aunque este tipo de antena es importante en algunos sistemas de comunicación, tales como en radio difusión o telefonía, hay otros casos en que nos interesa favorecer la radiación en una dirección determinada. Esto se consigue mediante agrupaciones de antenas que son sistemas de antenas compuestos de varios elementos similares y en los

que juega un papel fundamental, en lo referente a la directividad del conjunto, la amplitud y fase en la alimentación de cada radiador individual así como la distribución espacial de los mismos.

Cuando trabajamos a frecuencias altas, las pequeñas dimensiones de las antenas de media longitud de onda (usuales en estos sistemas) permiten el agrupamiento de un número relativamente considerable de elementos en un volumen no excesivo y esto facilita el diseño de sistemas radiantes fuertemente directivos con una ganancia elevada.

El campo electromagnético en la zona de radiación es el resultado de las interferencias de los campos radiados por cada elemento, de tal modo que en ciertas direcciones estos campos interfieren destructivamente mientras que en otras lo hacen sumando amplitudes y dando lugar a un máximo de radiación.

Para obtener sistemas fuertemente directivos el número de elementos de la agrupación debe ser elevado pero esto origina que la resistencia de radiación del conjunto sea extraordinariamente baja lo que exige grandes corrientes de alimentación para producir campos de intensidad apreciable y esto implica, a su vez, pérdidas de eficiencia importantes.

Por otra parte, los cálculos de las impedancias de entrada para cada elemento son muy complejos debido a las influencias mutuas entre los distintos radiadores que en estos casos no se pueden despreciar. Esto supone que los diversos elementos del conjunto, aun siendo idénticos, no presenten la misma impedancia en sus puntos de alimentación. Para resolver este problema se utilizan transformadores de acoplo que son costosos y de difícil ajuste.

Por último, el hecho de utilizar normalmente dipolos de media longitud de onda como radiadores, impone que la anchura de banda útil es muy restringida, lo cual significa que los diagramas de radiación se alteran rápidamente con ligeras variaciones de la frecuencia.

Este tipo de sistemas es muy utilizado en la región de ondas decamétricas y métricas. Sin embargo, para ondas centimétricas se prefieren los sistemas de radiación por apertura. La razón fundamental se encuentra en la dificultad de excitar convenientemente un número muy elevado de dipolos para frecuencias elevadas.

Todas las consideraciones anteriores hacen que las agrupaciones prácticas no consten de un gran número de elementos, aún cuando teóricamente se puedan diseñar sistemas altamente directivos aumentando la cantidad de radiadores.

El estudio de agrupaciones constituye un aspecto de enorme interés por su utilización real, así como porque sus planteamientos se aplican también en el cálculo de antenas de apertura y sobre todo, como método de síntesis, es decir, como método para diseñar sistemas radiantes con unos diagramas de radiación preestablecidos.

En ocasiones algunos elementos de la agrupación pueden estar desconectados del generador de alimentación y las corrientes que por ellos circulan son las inducidas por los otros elementos activos. El uso de **radiadores pasivos** tiene aplicación práctica en diversos sistemas reales tales como la antena Yagi, usada generalmente como receptora en TV.

Nos limitaremos al estudio del caso más usual, una agrupación de antenas idénticas, con distribuciones de corrientes similares y todas ellas con la misma orientación. Estas agrupaciones las podemos clasificar de acuerdo a su estructura geométrica en lineales, circulares, planares, etc., según que los elementos que componen el conjunto se encuentren, respectivamente, sobre dichas formas geométricas.

## 4.1. Principio de multiplicación de diagramas. Factor de agrupación

Nuestro objetivo es el cálculo del campo generado por una agrupación de antenas en la zona de radiación. Vamos a ver que dicho campo puede expresarse como el producto de dos cantidades: una de ellas es el campo creado por uno de los elementos del conjunto; la otra, denominada factor de la agrupación, es una magnitud que caracteriza a la agrupación y depende tan sólo de las excitaciones y posiciones relativas de los radiadores que la componen. El proceso de separación del campo en estas dos partes se conoce como factorización o **principio de multiplicación de diagramas**.

Así pues, partiremos una agrupación formada por $N$ antenas iguales con distribuciones de corriente similares que sólo se diferencian unas de otras por constantes complejas. A continuación, fijamos una antena de referencia con respecto a las restantes, estando todas igualmente orientadas entre sí, y tomamos un punto de la distribución de corriente de la antena de referencia como origen de un sistema de coordenadas esféricas $(r, \theta, \varphi)$.

La posición y la distribución de corriente del m-ésimo elemento de la agrupación se puede especificar mediante un vector $\mathbf{r}_m$, que aplicado a la antena de

referencia la trasladaría a la posición de dicho elemento; y una constante compleja $C_m$, que representa el coeficiente de excitación por el cual debe multiplicarse la distribución de corriente de la antena de referencia para obtener la del elemento en estudio.

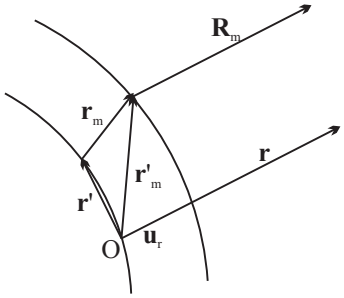



Figura 8.17

De acuerdo con la figura 8.17, si llamamos $\mathbf{r}'$ al vector de posición de un punto de la antena de referencia, y $\mathbf{r}'_m$ el vector de posición del punto homólogo del m-ésimo radiador, deberá cumplirse que

$$\mathbf{r}'_m = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_m$$

y

$$\widehat{\mathbf{J}}_m(\mathbf{r}'_m) = C_m \widehat{\mathbf{J}}_{ref}(\mathbf{r}')$$

donde $\widehat{\mathbf{J}}_m$ y $\widehat{\mathbf{J}}_{ref}$ son, respectivamente, las distribuciones de corriente relativas al elemento m-ésimo y a la antena de referencia.

La expresión del potencial vector magnético para el radiador m-ésimo en la zona de radiación viene dado por

$$\widehat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{V'_m} \widehat{\mathbf{J}}_m(\mathbf{r}'_m)\ e^{jk\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'_m} dv'_m$$

Sustituyendo los valores del vector de posición y de la distribución de corriente del m-ésimo radiador en función del de referencia y sumando las contribuciones de los $N$ elementos de la agrupación, el potencial vector magnético total de la agrupación será

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{A}}_{ref}(\mathbf{r})\ f(\theta, \varphi) \tag{8.40}$$

donde

$$\widehat{\mathbf{A}}_{ref}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\int_{V'}\widehat{\mathbf{J}}_{ref}(\mathbf{r}')\ e^{jk\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}'}dv'$$

es el potencial vector debido a la antena de referencia y

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{m=1}^{N} C_m\ e^{jk\mathbf{u}_r\cdot\mathbf{r}_m} \tag{8.41}$$

es una magnitud compleja adimensional, conocida como **factor de la agrupación**, que depende sólo de los coeficientes de excitación $C_m$ y de la posición relativa de los elementos ($\mathbf{r}_m$) y que es independiente del tipo de radiadores de que se trate.

A partir de las ecuaciones

$$\widehat{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mu_o}\nabla\times\widehat{\mathbf{A}}$$

$$\widehat{\mathbf{E}} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_o}\nabla\times\widehat{\mathbf{H}}$$

que expresan los campos eléctrico y magnético en función del potencial vector $\widehat{\mathbf{A}}$, podemos concluir que los campos para la agrupación se pueden expresar también de la siguiente forma

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{E}}_{ref}(\mathbf{r})\ f(\theta,\varphi) \tag{8.42}$$

y

$$\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{H}}_{ref}(\mathbf{r})\ f(\theta,\varphi) \tag{8.43}$$

donde $\widehat{\mathbf{E}}_{ref}$ y $\widehat{\mathbf{H}}_{ref}$ son los campos eléctrico y magnético correspondientes a la antena de referencia y $f(\theta,\varphi)$ es el factor de la agrupación.

Las ecuaciones (8.42) y (8.43) expresan analíticamente la condición de factorización de una agrupación: el diagrama de radiación de una agrupación se puede considerar como el producto de otros dos, el diagrama de un elemento del sistema situado en el origen de coordenadas, y el factor de la agrupación que representaría el diagrama de radiación de una agrupación de elementos isótropos.

El principio de factorización resulta muy útil para el estudio de las características de radiación de las agrupaciones de antenas pero no debemos olvidar que, en la práctica, su utilización debe hacerse con precaución ya que, aunque todos los radiadores de la agrupación sean idénticos, no podemos garantizar que los diagramas de radiación de cada uno de ellos lo sean, puesto que el diagrama de

radiación individual de un radiador puede modificarse cuando está en presencia de otros elementos.

Todo el estudio sobre las agrupaciones está basado en la obtención y análisis del factor de la agrupación dado por (8.41). Si en esta expresión utilizamos coordenadas rectangulares, tenemos

$$\mathbf{r}_m = x_m\mathbf{u}_x + y_m\mathbf{u}_y + z_m\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{u}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\ \mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\ \mathbf{u}_y + \cos\theta\ \mathbf{u}_z$$

y el factor de agrupación vendrá dado por

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{m=1}^{N} C_m\ e^{jk(x_m \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\ + y_m \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + z_m\cos\theta)}$$

que pone de manifiesto que, incluso en agrupaciones de pocos elementos, interviene un número relativamente elevado de parámetros. En la mayoría de las ocasiones el estudio de la agrupación se realiza mediante el análisis de la magnitud

$$S(\theta,\varphi) = |f(\theta,\varphi)|^2 \tag{8.44}$$

que representa la densidad de potencia de una agrupación de elementos isótropos.

En la práctica el espaciado entre las antenas que constituyen una agrupación es regular y con frecuencia están colocadas a lo largo de una línea. Vamos a hacer el estudio de estas agrupaciones partiendo del caso general de una configuración tridimensional de antenas dipolares como la que se muestra en la figura 8.18.

Consideremos los elementos de la agrupación ordenados en forma de red tridimensional con vectores $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$, según los ejes X, Y y Z. Con esta estructura el vector de posición $\mathbf{r}_m$, la fase $\beta_m$ y la constante de excitación $C_m$ de la antena $m$ vienen dados por

$$\mathbf{r}_m = \sum_{i=1}^{3} m_i\mathbf{d}_i$$

$$\beta_m = \sum_{i=1}^{3} m_i\delta_i$$

y

$$C_m = e^{j\beta_m}$$

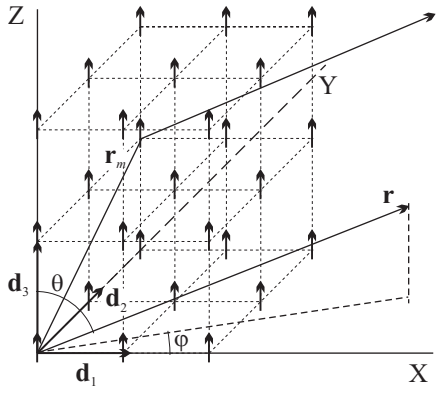



Figura 8.18. Agrupación tridimensional de antenas dipolares con espaciado regular

siendo $\delta_i$ la fase constante de cualquier elemento con respecto al vecino más próximo sobre el eje definido por el vector base $\mathbf{d}_i$. De la definición de factor de agrupación tendremos que

$$\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{E}}_{ref} \sum_m e^{j(k\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{u}_r + \beta_m)}$$

expresión que debido a la cantidad de parámetros de que depende puede adaptarse a casi cualquier forma de radiación deseada. Ahora bien, en la exponecial vemos que

$$\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{u}_r = m_1 d_1 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + m_2 d_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + m_3 d_3 \cos\theta$$

Entonces, el campo eléctrico de la agrupación queda

$$\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{\mathbf{E}}_{ref} \prod_{i=1}^{3} f_i \qquad \text{con} \qquad f_i = \sum_{m_i=0}^{N_i-1} e^{jm_i\psi_i}$$

con

$$\begin{aligned} \psi_1 &= kd_1 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \delta_1 \\ \psi_2 &= kd_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \delta_2 \\ \psi_3 &= kd_3 \cos\theta + \delta_3 \end{aligned}$$

y donde $N_i$ es el número de antenas en cada hilera paralela al eje $i$. Es fácil comprobar que cada función $f_i$ es la suma de los $N_i$ primeros términos de una

progresión geométrica de razón $e^{j\psi_i}$. Si recordamos que la suma de loa $n$ primeros términos de una progresión geométrica viene dada por

$$\Sigma = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

donde $a_1$ es el primer término y $r$ es la razón, obtenemos

$$f_i = e^{j(N_i-1)\psi_i/2} \frac{\operatorname{sen}(N_i\psi_i/2)}{\operatorname{sen}(\psi_i/2)} \qquad \text{con} \qquad i = 1, 2, 3$$

por lo que el módulo del campo eléctrico vendrá dado por

$$|\widehat{\mathbf{E}}| = |\widehat{\mathbf{E}}_{ref}| \prod_{i=1}^{3} |f_i|$$

con

$$|f_i| = \left| \frac{\operatorname{sen}(N_i\psi_i/2)}{\operatorname{sen}(\psi_i/2)} \right|$$

Particularizando para el caso en que los elementos de la agrupación sean dipolos de media longitud de onda onda, tendremos para el campo eléctrico

$$|\widehat{\mathbf{E}}_{ref}| = \frac{60I_o}{r} |f_o(\theta)|$$

con $f_o(\theta)$ el factor de la antena. Por tanto el módulo del campo total será

$$|\widehat{\mathbf{E}}| = \frac{60I_o}{r} |f_o(\theta)||f_1||f_2||f_3| \tag{8.45}$$

Si consideramos que los elementos del agrupación son antenas isótropas, $f_o(\theta) = 1$, (aunque ya sabemos que no existen) entonces la direccionalidad de la radiación depende única y exclusivamente del factor de agrupación, es decir

$$|\widehat{\mathbf{E}}| = |\widehat{\mathbf{E}}_{ref}||f_1||f_2||f_3|$$

Por tanto, podemos concluir que los módulos de las funciones

$$f_i = \frac{\operatorname{sen}(N_i\psi_i/2)}{\operatorname{sen}(\psi/2)}$$

van a determinar las propiedades de radiación de la agrupación.

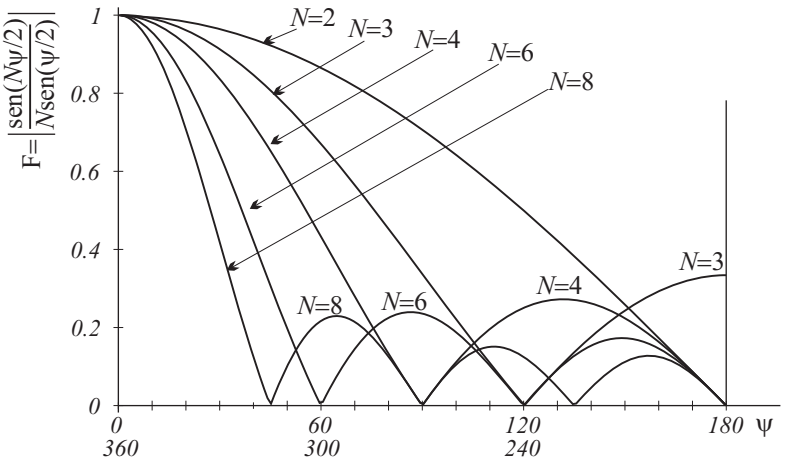



Figura 8.19

Estas funciones se caracterizan porque presentan nulos para $N_i\psi/2 = \pm p\pi$, con $p$ número entero, excepto para $p = 0$ en que presentan un máximo de valor igual a $N_i$, como puede comprobarse aplicando la regla de L'Hopital. Entre cada dos ceros existe un máximo de amplitud sensiblemente inferior al máximo principal y de valor decreciente a media que aumenta $\psi$. Dividiendo $f_i(\psi)$ por $N_i$ obtenemos una curva normalizada. En la figura 8.19 se representan las curvas normalizadas para varios valores de $N$. Podemos comprobar que estas curvas son simétricas respecto a $\psi = 180^o$.

$$|F_i| = \frac{|f_i|}{N} = \frac{1}{N}\frac{\operatorname{sen}(N_i\psi_i/2)}{\operatorname{sen}(\psi/2)} \tag{8.46}$$

## 4.2. Agrupación vertical de dipolos

La agrupación vertical que se muestra en la figura 8.20, corresponde a un caso particular de la distribución tridimensional con $N_1 = N_2 = 0$. Llamando $d = d_3$, $N = N_3$ y $\delta = \delta_3$, tendremos

$$\psi = \delta + kd\cos\theta$$

y

$$f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(N\psi/2)}{\operatorname{sen}(\psi/2)} \tag{8.47}$$

y por tanto

$$|\widehat{\mathbf{E}}| = |\widehat{\mathbf{E}}_{ref}| \left| \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N}{2}\left(\delta + kd\cos\theta\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta + kd\cos\theta}{2}\right)} \right| \tag{8.48}$$

donde puede observarse que en el plano ecuatorial no hay directividad pues la expresión anterior tiene simetría de revolución.

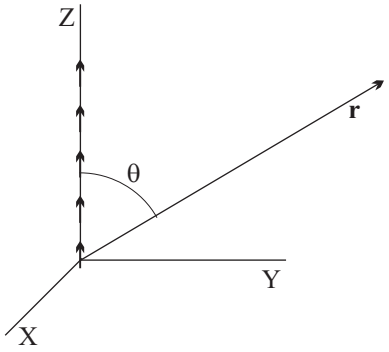



Figura 8.20. Agrupación vertical de dipolos

## 4.3. Agrupación horizontal de dipolos

La directividad en el plano ecuatorial puede mejorarse con una agrupación de antenas colocadas verticalmente según el eje Y como muestra la figura 8.21. Esta agrupación es otro caso particular de la distribución general con $N_1 = N_3 = 0$. El módulo del campo eléctrico vendrá dado en este caso por

$$|\widehat{\mathbf{E}}| = |\widehat{\mathbf{E}}_{ref}| \left| \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N}{2}\left(\delta + kd\cos\gamma\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta + kd\cos\gamma}{2}\right)} \right| \tag{8.49}$$

donde $d = d_2,\ n = n_2$ y $\delta = \delta_2$. El ángulo $\gamma$ es el formado por el vector de posición $\mathbf{r}$ con el eje de la agrupación, en este caso, el eje Y. Entonces

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

De esta forma, aparece una dependencia con el ángulo azimutal en el factor de agrupación, y por tanto, una direccionalidad del diagrama de radiación en el plano XY.

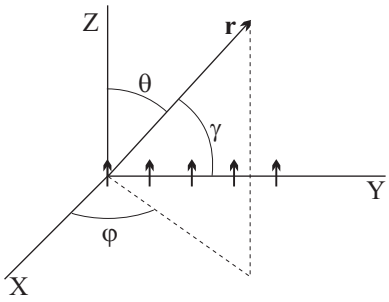



Figura 8.21

Si las antenas fueran isótropas, la orientación de las mismas no influiría, lógicamente, en la directividad del diagrama de radiación. En este caso, un agrupamiento lineal en el eje Y sería equivalente a un agrupamiento lineal en el eje Z, ya que el ángulo $\gamma$ sería el ángulo polar.

## 4.4. Análisis del diagrama de radiación de una agrupación

Partiremos para dicho estudio de la expresión del factor de agrupación, ecuación (8.47), obtenida para un agrupación vertical lineal.

$$f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(N\psi/2)}{\operatorname{sen}(\psi/2)}$$

Los nulos del diagrama de radiación de la agrupación son aquellos para los que el numerador de este factor se anula, a excepción del caso $\psi = 0$ que corresponde al máximo absoluto. Es decir, los $N-1$ ceros de $f(\psi)$ entre 0 y $2\pi$ se obtienen de

$$N\frac{\psi}{2} = p\pi \quad \text{con} \quad p = 1, 2, ..., N-1$$

Entre cada dos nulos se encuentra un máximo secundario cuya amplitud irá decreciendo a medida que $\psi$ se aproxima a los $180^o$. A partir de este valor la curva es simétrica hasta los $360^o$.

Un caso de particular interés de las agrupaciones lineales que estamos estudiando lo constituyen aquellos en los que la alimentación es uniforme e idéntica para todos los elementos, es decir cuando el desfase entre radiadores es nulo, $\delta = 0$.

El módulo del factor de la agrupación será entonces

$$|f(\theta)| = \left| \frac{\operatorname{sen}\left(N\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta\right)} \right|$$

Y el máximo absoluto de esta magnitud corresponde a

$$\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta_{\text{máx}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$$

es decir, la dirección de máxima radiación es perpendicular al eje del agrupación e independiente del espaciado $d$. Este tipo de agrupación se conoce como **agrupación de radiación transversal** o *broadside*.

Los $N-2$ máximos secundarios de esta agrupación los obtendremos imponiendo la condición de máximo al numerador del valor absoluto del factor de agrupación

$$\operatorname{sen}\left(N\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad N\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Entonces, tenemos

$$\cos\theta = \frac{\lambda}{2Nd}(2k+1) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

El primer máximo secundario tiene lugar para $k = 1$

$$\cos\theta_1 = \frac{3\lambda}{2Nd}$$

donde $d$, recordemos, es la separación entre los radiadores individuales. De la expresión anterior se puede concluir que cuando

$$d < \frac{3\lambda}{2N}$$

no habrá lóbulos secundarios. Por tanto, si la agrupación se utiliza para reforzar la directividad parece lógico elegir el espaciado de forma que se verifique esta condición pues así se evitan lóbulos secundarios.

Otro tipo de agrupación de interés es aquella en que la dirección de radiación máxima coincide con el eje del agrupación, es decir, el máximo ocurre para $\theta_{\text{máx}} = 0, \pi$. Esta agrupación se conoce como **agrupación longitudinal** o *endfire*. Si

exigimos que el desfase entre la alimentación de sus radiadores sea tal que cumpla $\psi = 0$ con $\theta_{\text{máx}} = 0, \pi$, de (8.47) obtenemos para $\psi$

$$\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \pm kd = 0$$

de donde

$$\delta = \pm \frac{2\pi}{\lambda} d$$

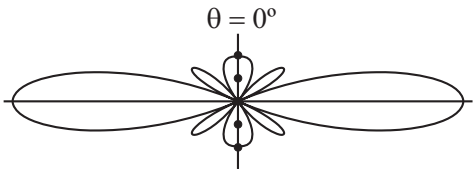



Figura 8.22. Diagrama de radiación de una agrupación de cinco radiadores tipo *Broadside*

Las figuras 8.22 y 8.23 corresponden a los diagramas de radiación de una agrupación vertical de cinco elementos separados una distancia $d = \lambda/2$, de tipo transversal o *broadside* y de tipo longitudinal o *endfire*. En ambos casos se observa una directividad del factor de agrupación en el plano XY. Es también evidente de las figuras que la directividad es menor para la configuración *endfire* que para la *broadside*.

Vemos en la figura 8.22, que en la configuración tipo horizontal o *broadside*, el máximo se encuentra en $\theta = \pi/2$, lo que no es de extrañar ya que estamos suponiendo que todas las corrientes de la agrupación en línea recta tienen el mismo módulo y fase y, por tanto, sus contribuciones a la radiación se sumarán en fase en el plano perpendicular al eje de la agrupación.

## 4.5. Propiedades directivas de agrupaciones uniformes

Como ya se definió, recordemos que el tamaño del haz entre los primeros nulos, identificado por sus siglas en inglés BWFN (beamwidth between first nulls), viene dado por el ángulo $2\alpha$ formado por las direcciones de los nulos adyacentes al lóbulo principal, de forma que se verifica

$$\theta_1 = \theta_o - \alpha \quad ; \quad \theta_2 = \theta_o + \alpha \quad ; \quad \text{BWFN} = 2\alpha$$

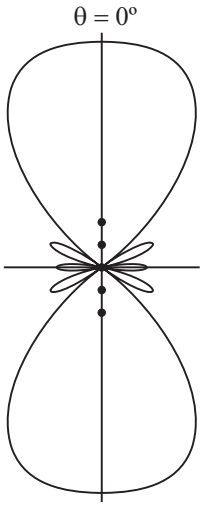



Figura 8.23. Diagrama de radiación de una agrupación de cinco radiadores tipo *Endfire*

donde $\theta_o$ representa la dirección de máxima radiación o del lóbulo principal y que está determinado por la condición $\psi = 0$, esto es

$$\delta + kd\cos\theta_0 = 0$$

Sean $\theta_1$ y $\theta_2$ las direcciones correspondientes a los dos nulos adyacentes definidos por $N\psi/2 = \pm p\pi$, esto es

$$\delta + kd\cos\theta_2 = -\frac{2\pi}{n}$$

y

$$\delta + kd\cos\theta_1 = \frac{2\pi}{n}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, podemos escribir

$$\cos\theta_2 - \cos\theta_o = -\frac{2\pi}{nkd}$$

Si suponemos que el diagrama de radiación es muy directivo, es decir, que $\alpha \ll 1$ podemos hacer la aproximación

$$\cos\theta_2 = \cos(\theta_o + \alpha) \simeq \cos\theta_o - \alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_o - \frac{\alpha^2}{2}\cos\theta_o$$

que conduce a

$$\alpha^2 \cos\theta_o + 2\alpha \operatorname{sen}\theta_o = \frac{2\lambda}{Nd}$$

A partir de esta ecuación puede determinarse la anchura del lóbulo principal de la agrupación. Para los casos particulares estudiados resulta:

- Agrupación de tipo transversal o *broadside*. Para este tipo $\theta_o = \pi/2$ y entonces
$$2\alpha \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{2\lambda}{Nd} \quad \Rightarrow \quad \text{BWFN} = 2\alpha = \frac{2\lambda}{Nd}$$
- Agrupación de tipo longitudinal o *endfire*. Para este tipo $\theta_o = 0$ y entonces
$$\alpha^2 = \frac{2\lambda}{Nd} \quad \Rightarrow \quad \text{BWFN} = 2\alpha = 2\sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}}$$

Vemos pues, que el haz es tanto más estrecho cuanto menor es la relación $\lambda/d$. Además, cuanto más se aleje el lóbulo principal de la dirección $\pi/2$, más se ensancha éste, perdiendo directividad. En general, en los diagramas de radiación tipo endfire la anchura del lóbulo principal aumenta con relación a la agrupación de tipo transversal (broadside), pero el número de lóbulos secundarios de este último es superior al del primero y si la magnitud de estos lóbulos fuese apreciable, supondría que una parte considerable de la energía radiada se dispersaría en direcciones no deseadas. De aquí que sea importante realizar un estudio previo sobre ambas magnitudes, ancho del lóbulo principal y nivel del lóbulo secundario, para obtener la optimización más adecuada al problema de radiación en cuestión.

## 5. EJERCICIOS PROPUESTOS

**E 8.1** Dada una antena lineal de longitud $L = \lambda$, con una distribución de corriente como la expresada por la ecuación (8.25). Obtener el diagrama de radiación y calcular la resistencia de radiación y la directividad.[3]

**E 8.2** Dada una antena lineal de longitud $L = 3\lambda/2$, con una distribución de corriente como la expresada por la ecuación (8.25). Obtener el diagrama de radiación; calcular la resistencia de radiación y la directividad.

**E 8.3** Dada una antena lineal de longitud $L = \lambda/2$, con una distribución de corriente de la forma, $I(z', t) = I_o \cos(\omega t)$. Obtener el diagrama de radiación. Calcular la resistencia de radiación y la directividad.

**E 8.4** Sobre el eje Z se mueve una carga $q$. El movimiento de la carga obedece a la ecuación $z = z_o \cos \omega t$. ¿Se radia campo electromagnético?

**E 8.5** Tenemos un anillo circular de radio $a$ y sección despreciable frente al radio. Está situado en el plano XY con centro en el origen. Dicho anillo esta compuesto por un dieléctrico ideal (aislante perfecto). Sobre el anillo hay una distribución lineal de carga $\lambda = \lambda_o \operatorname{sen}(\varphi/2)$. El anillo gira con una velocidad angular $\omega$ constante alrededor del eje Z, manteniéndose en el plano XY.

Calcular los campos radiados y el valor medio del vector de Poynting en la zona de radiación. ¿Qué ocurre si $\lambda = \lambda_o$?

**E 8.6** Un sistema está compuesto por dos dipolos elementales situados respectivamente sobre el eje X el eje Y. Dichos dipolos oscilan de la forma siguiente: $\mathbf{p}_1 = p_o \cos \omega t \, \mathbf{u}_x$ y $\mathbf{p}_2 = p_o \cos \omega t \mathbf{u}_y$.

Obtener los campos eléctrico y magnético en la zona de radiación. Calcular la potencia radiada.

**E 8.7** En el origen y en el punto $A(0, 0, d)$ se hallan situadas dos antenas idénticas en magnitud y fase. Demostrar que el factor de agrupación viene dado por

$$|f(\theta)| = \left| \cos\left( \frac{1}{2} kd \cos\theta \right) \right|$$

Representar para $d = \lambda/2$ los diagramas de radiación en los planos $X = 0$ e $Y = 0$, suponiendo las dos antenas isótropas. Hacer lo mismo cuando son dos dipolos paralelos de tamaño igual a media longitud de onda y orientados en la dirección $OX$ positiva.

---

[3] Para la representación y cálculo aproximado se utiliza un programa como Maple u otro similar.

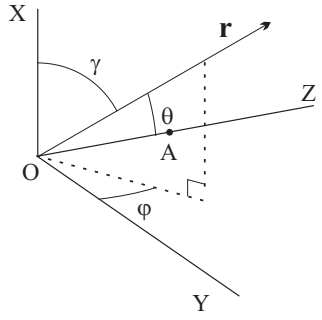



Figura E8.7

**E 8.8** Una agrupación lineal de cinco antenas isótropas separadas entre sí por la distancia $d$ se colocan en el eje $OY$, en las posiciones $(0, md, 0)$ con $m = 0, 1, 2, 3, 4$, tal como se indica en la figura. Las corrientes están en fase y tienen valores respectivos $I_1, I_2, ....I_5$ dados por la relación

$$I_{m+1} = I_o \begin{pmatrix} 4 \\ m \end{pmatrix}$$

con $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Demostrar que el factor normalizado de la agrupación es

$$|f(\theta)| = [\cos(kd/2\cos\theta)]^4$$

Representar el diagrama de radiación en el plano $z = 0$ para $d = \lambda/2$ y hallar la anchura del lóbulo principal.

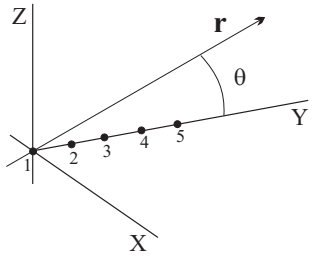



Figura E8.8

**E 8.9** Dos antenas presentan un factor de agrupación normalizado

$$F(\theta) = \cos\left[(1 + \cos\theta)\pi/4\right]$$

¿Cuál es la separación de las antenas? ¿Cuál es la diferencia de fase?

Dibuje el diagrama de radiación en el caso de que sean dos antenas isótropas y en el caso de que sean antenas dipolo $\lambda/2$

**E 8.10** Se dispone de $N$ antenas isótropas idénticas alineadas sobre la recta $\theta = 0$. Su separación mútua es $d = m\lambda$ y pueden emitir con una diferencia de fase $\delta$ entre dos contiguas sucesivamente. A partir del diagrama de radiación adjunto, determine $N$, $m$ y $\delta$.

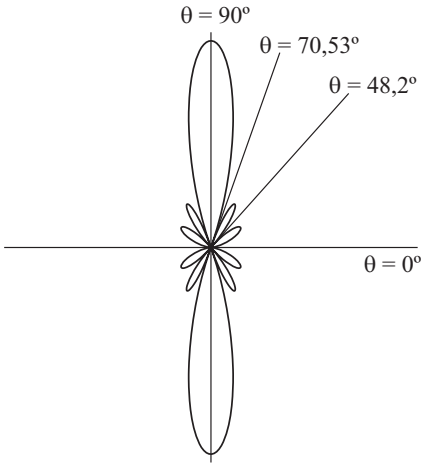



Figura E8.10

**E 8.11** El diagrama de radiación de dos antenas isótropas idénticas es el representado en la figura 8.11(a). Si la longitud de onda es de 100 m, halle la separación entre las antenas y la diferencia de fase con que emiten.

Ocho antenas isótropas idénticas que emiten en fase se colocan en la forma que indica la figura 8.11(b), lo cual equivale a tener cuatro antenas de intensidad relativa 1:3:3:1. El diagrama de radiación que se obtiene si la separación entre antenas contigüas es $\lambda/2$, es el representado en la figura. Halle la expresión del factor de agrupamiento y con ello justifique la forma y características específicas del diagrama. Compárelo con el que producirían las ocho antenas colocadas en fila.

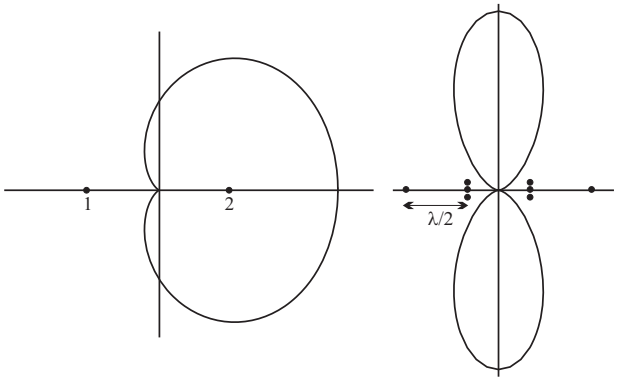



Figura E8.11

**E 8.12** Dos antenas isótropas idénticas, alineadas sobre la recta $\theta = 0$ y separadas por una distancia $d = m\lambda$ , emiten con una diferencia de fase $\delta$. Su diagrama de radiación presenta nulos en cuatro direcciones para las cuales $\operatorname{sen}\theta$ vale 3/4 ó $-1/4$

Determine $m$ y $\delta$. Dibujar el diagrama polar de radiación del sistema.

**E 8.13** Dos antenas isótropasse encuentran situadas en el plano XY, emiten ondas electromagnéticas con una frecuencia de $f = 300$MHz, una diferencia de fase $\delta$, y amplitudes $A_1 = 1$ y $A_2 = A$. La primera antena se halla en el origen de coordenadas (0,0). ¿Cuál debe ser la posición $(x_2, y_2)$ de la segunda y los valores de A y $\delta$ para obtener los siguientes diagramas de intensidad de la radiación resultante?

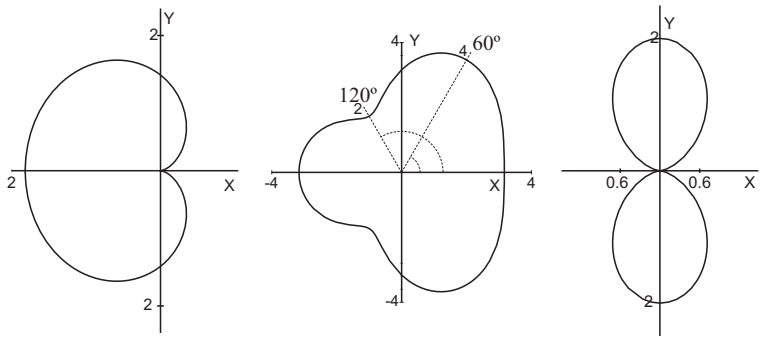



Figura E8.13

# Apéndice A

# TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Según el teorema de reciprocidad, la corriente en un detector dividida por el voltaje de la fuente permanece constante si se intercambian la fuente y el detector siempre que no varíen las impedancias del sistema ni la frecuencia de operación. Este teorema se utiliza ampliamente para estudiar tanto circuitos eléctricos como antenas. Vamos a demostrarlo en el caso general aplicando las ecuaciones de Maxwell.

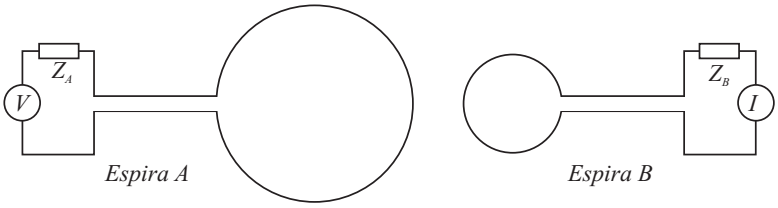



Figura A.1

Un par de espiras como las mostradas en la figura A.1, una de ellas empleada como antena emisora y la otra como antena receptora nos servirán para fijar ideas en la discusión sin pérdida de generalidad. Los conductores y el medio de propagación se suponen isótropos. La fuente suministra a la antena de la izquierda un voltaje $V$, mientras el detector, conectado a la antena de la derecha, mide una corriente $I$. El teorema de reciprocidad establece que la razón $I/V$ no se modifica si, como se indica en la figura A.2 se intercambian la fuente y el detector.

Para demostrar el enunciado anterior, denominaremos con subíndice 1 los vectores de campo que se obtienen cuando las antenas se emplean en la configuración 1 de la figura A.2, y con subíndice 2 cuando trabajamos con la configuración 2 de dicha figura. La frecuencia y las impedancias se suponen iguales en ambas configuraciones.

En cualquier punto del espacio incluyendo las antenas y las fuentes, se tiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \tag{A.1}$$

$$= \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1$$

y empleando las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) &= -\mathbf{H}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - \mathbf{E}_1 \cdot \left( \mathbf{J}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t} \right) \\ &+ \mathbf{H}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} + \mathbf{E}_2 \cdot \left( \mathbf{J}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos campos armónicamente variables con el tiempo. Entonces, la expresión anterior en notación fasorial se reduce a

$$\nabla \cdot \left( \widehat{\mathbf{E}}_1 \times \widehat{\mathbf{H}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}_2 \times \widehat{\mathbf{H}}_1 \right) = \widehat{\mathbf{E}}_2 \cdot \widehat{\mathbf{J}}_1 - \widehat{\mathbf{E}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{J}}_2 \tag{A.2}$$

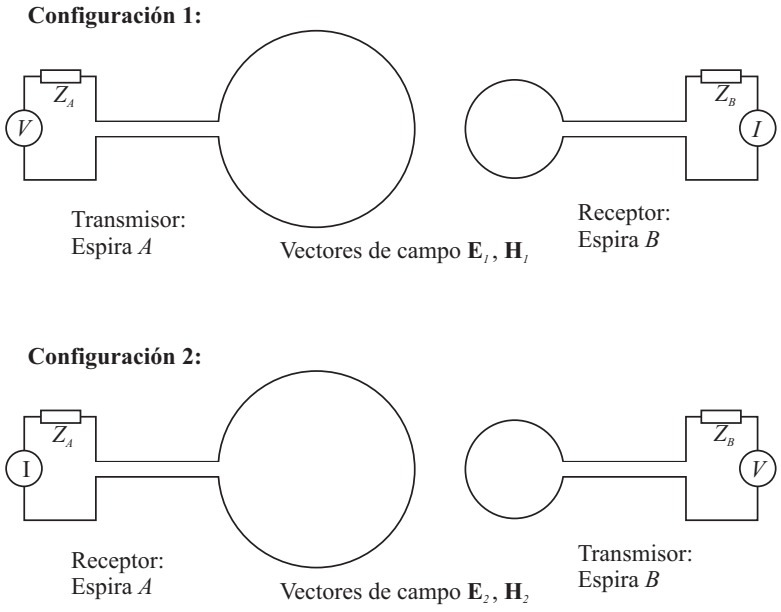



Figura A.2

Para puntos situados fuera de la fuente, la densidad de corriente $\widehat{\mathbf{J}}$ es sencillamente $\gamma\widehat{\mathbf{E}}$. Sin embargo, dentro de cada generador existirá un campo electromotor $\widehat{\mathbf{E}}'$, por tanto la expresión general para la densidad de corriente será

$$\widehat{\mathbf{J}}_1 = \gamma\left(\widehat{\mathbf{E}}_1 + \widehat{\mathbf{E}}'_A\right)$$

$$\widehat{\mathbf{J}}_2 = \gamma\left(\widehat{\mathbf{E}}_2 + \widehat{\mathbf{E}}'_B\right)$$

donde $\widehat{\mathbf{E}}'_A$ y $\widehat{\mathbf{E}}'_B$ son respectivamente las intensidades del campo eléctrico electromotor en el interior de los generadores de la espira $A$ y de la espira $B$ cuando el sistema está funcionando en la configuración 1 o en la 2. Despejando $\widehat{\mathbf{E}}_1$ y $\widehat{\mathbf{E}}_2$ en estas expresiones y sustituyendo en (A.2), resulta

$$\nabla\cdot\left(\widehat{\mathbf{E}}_1\times\widehat{\mathbf{H}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}_2\times\widehat{\mathbf{H}}_1\right) = \widehat{\mathbf{E}}'_A\cdot\widehat{\mathbf{J}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}'_B\cdot\widehat{\mathbf{J}}_1 \tag{A.3}$$

expresión que, en general, tiene un valor no nulo y que es válida para cualquier par de campos electromagnéticos en cualquier punto del espacio, incluso en el interior de las fuentes. A continuación integramos esta expresión sobre un volumen $V'$

$$\int_{V'}\nabla\cdot\left(\widehat{\mathbf{E}}_1\times\widehat{\mathbf{H}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}_2\times\widehat{\mathbf{H}}_1\right)dv' = \int_{V'}\left(\widehat{\mathbf{E}}'_A\cdot\widehat{\mathbf{J}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}'_B\cdot\widehat{\mathbf{J}}_1\right)dv'$$

y teniendo en cuenta el teorema de la divergencia, se tiene

$$\int_{S'}\left(\widehat{\mathbf{E}}_1\times\widehat{\mathbf{H}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}_2\times\widehat{\mathbf{H}}_1\right)\cdot d\mathbf{s}' = \int_{V'}\left(\widehat{\mathbf{E}}'_A\cdot\widehat{\mathbf{J}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}'_B\cdot\widehat{\mathbf{J}}_1\right)dv' \tag{A.4}$$

Si extendemos el volumen $V'$ a todo el espacio, puesto que las fuentes ocupan un volumen finito, la superficie de integración estará infinitamente alejada de ellas y podemos suponer que los campos corresponden a ondas planas para las que se verifica

$$\widehat{\mathbf{H}}_1 = \frac{\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{E}}_1}{Z_o} \tag{A.5}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario en la dirección de propagación y $Z_o$ es la impedancia característica del vacío. Y análogamente para $\widehat{\mathbf{H}}_2$ y $\widehat{\mathbf{E}}_2$.

En consecuencia, en puntos infinitamente alejados de las fuentes, el integrando del primer miembro de (A.4) se puede escribir como

$$\widehat{\mathbf{E}}_1\times\widehat{\mathbf{H}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}_2\times\widehat{\mathbf{H}}_1 = \frac{1}{Z_o}\left[\widehat{\mathbf{E}}_1\times\left(\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{E}}_2\right) - \widehat{\mathbf{E}}_2\times\left(\mathbf{n}\times\widehat{\mathbf{E}}_1\right)\right] \tag{A.6}$$

desarrollando los productos y recordando que $\mathbf{n}$ es perpendicular a $\widehat{\mathbf{E}}_1$ y $\widehat{\mathbf{E}}_2$ se puede comprobar fácilmente que la cantidad entre corchetes de (A.6) se anula. Así pues, (A.4) queda

$$\int_{V'} \left( \widehat{\mathbf{E}}'_A \cdot \widehat{\mathbf{J}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}'_B \cdot \widehat{\mathbf{J}}_1 \right) dv' = 0$$

donde la integración se había extendido a todo el espacio. Ahora bien, esta integración se puede limitar al volumen ocupado por las fuentes, ya que fuera de ellas los campos electromotores son nulos. Por tanto

$$\int_A \widehat{\mathbf{E}}'_A \cdot \widehat{\mathbf{J}}_2 \, dv = \int_B \widehat{\mathbf{E}}'_B \cdot \widehat{\mathbf{J}}_1 \, dV \tag{A.7}$$

Operando sobre la integral del primer miembro se llega a

$$\int_A \widehat{\mathbf{E}}'_A \cdot \mathbf{J}_2 \, dv' = \int_A \widehat{\mathbf{E}}'_A \cdot d\mathbf{l}' \, \widehat{\mathbf{J}}_2 \cdot d\mathbf{s}' = V_1^A I_2^A \tag{A.8}$$

donde $V_1^A$ es el voltaje suministrado por la espira $A$ en la configuración 1 e $I_2^A$ es la corriente que circula por esta espira en la configuración 2 (cuando se excita la espira $B$).

La integral del segundo miembro de (A.7) puede expresarse de forma análoga, obteniendo finalmente

$$V_1^A I_2^A = V_2^B I_1^B$$

o lo que es igual

$$\frac{I_2^A}{V_2^B} = \frac{I_1^B}{V_1^A} \tag{A.9}$$

que significa que el cociente entre la corriente que circula por la espira receptora y voltaje aplicado a la espira transmisora es igual en las dos configuraciones, es decir, cuando se intercambian los papeles de las antenas, siempre que las frecuencias y las impedancias no se modifiquen. Este es el teorema de reciprocidad válido para cualquier par de antenas.

No hay que olvidar que este teorema se refiere sólo a la razón $I/V$ y no dice nada sobre la potencia que consume la fuente que, en general, varía cuando ésta cambia de posición.

Una consecuencia importante del teorema de reciprocidad es que el diagrama de radiación de una antena debe tener la misma forma que la respuesta de la

antena en función del ángulo cuando se emplea como receptor. Este hecho se emplea corrientemente para determinar los diagramas de radiación.

Nuestra demostración del teorema es general, suponiendo que los medios son lienales e isótropos. En consecuencia se puede aplicar a los circuitos eléctricos corrientes.

Apéndice B

# RELACIONES MATEMÁTICAS I

## ÁREAS Y VOLÚMENES

- Paralelepípedo rectángulo de lados $a$, $b$, $c$

$$\text{Área de la superficie} = 2(a\,b + a\,c + b\,c) \tag{B.1}$$

$$\text{Volumen} = a\,b\,c \tag{B.2}$$

- Esfera de radio $r$

$$\text{Área} = 4\,\pi\,r^2 \tag{B.3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi\,r^3 \tag{B.4}$$

- Cilindro recto de radio $r$ y altura $h$

$$\text{Área superficie lateral} = 2\,\pi\,r\,h \tag{B.5}$$

$$\text{Volumen} = \pi\,r^2\,h \tag{B.6}$$

- Cono recto de radio $r$ y altura $h$

$$\text{Área de la superficie lateral} = \pi\,r(r^2 + h^2)^{1/2} \tag{B.7}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi\,r^2\,h \tag{B.8}$$

- Casquete esférico de radio $r$ y altura $h$

$$\text{Área de la superficie} = 2\,r\,h \tag{B.9}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi\,h^2(3\,r - h) \tag{B.10}$$

- Tronco de cono recto de radios $a$, $b$ y altura $h$

$$\text{Área de la superficie lateral} = \pi(a+b)(h^2+(b-a)^2)^{1/2} \tag{B.11}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi\, h\,(a^2 + a\,b + b^2) \tag{B.12}$$

- Toroide de radio interior $a$ y exterior $b$

$$\text{Área de la superficie} = \pi^2(b^2-a^2) \tag{B.13}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{4}\pi^2(a+b)(b-a)^2 \tag{B.14}$$

- Elipsoide de semiejes $a$, $b$ y $c$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c \tag{B.15}$$

## NÚMEROS COMPLEJOS

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= a + jb = Me^{j\alpha} = M(\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha) \\ M &= (a^2+b^2)^{1/2} \;\;;\;\; j = \sqrt{-1} \;\;;\;\; j^2 = -1 \end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\text{Conjugado de } \mathbf{z} \text{ es } \;\mathbf{z}^* = \bar{\mathbf{z}} = a - jb \tag{B.17}$$

$$\mathbf{z}_1 \pm \mathbf{z}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \tag{B.18}$$

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + j(a_1b_2 + b_1a_2) \tag{B.19}$$

$$\mathbf{z}_1 \cdot\, \mathbf{z}_2 = M_1 e^{j\alpha_1} M_2 e^{j\alpha_2} = M_1M_2\, e^{j(\alpha_1+\alpha_2)} = M_1M_2 \exp j(\,\alpha_1 + \alpha_2) \tag{B.20}$$

$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{z}^* = (a+jb)\,(a-jb) = a^2 + b^2 = M^2 \tag{B.21}$$

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{a_1+jb_1}{a_2+jb_2} = \frac{(a_1+jb_1)(a_2-jb_2)}{a_2^2+b_2^2} = \frac{M_1}{M_2}\exp j(\alpha_1-\alpha_2) \tag{B.22}$$

## RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \tag{B.23}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \tag{B.24}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha \cos\beta \tag{B.25}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \tag{B.26}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \tag{B.27}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \tag{B.28}$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{B.29}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{B.30}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{B.31}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{B.32}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \tag{B.33}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \tag{B.34}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{B.35}$$

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\operatorname{sen}\alpha \tag{B.36}$$

## RELACIONES HIPERBÓLICAS

$$e^{\pm x} = \cosh x \pm \operatorname{senh} x \tag{B.37}$$

$$\operatorname{senh} x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y \tag{B.38}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \tag{B.39}$$

## RELACIONES LOGARÍTMICAS

$$\log_{10} x = \log x \quad ; \quad \log_e x = \ln x \tag{B.40}$$

$$\log x = 0,4343 \ln x \quad ; \quad \ln x = 2,3026 \log x \tag{B.41}$$

$$\text{Decibelio} \qquad \text{dB} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 20 \log \frac{V_1}{V_2} \tag{B.42}$$

$\frac{P_1}{P_2}$ = relación entre potencias; $\frac{V_1}{V_2}$ = relación entre tensiones

$$\ln(re^{j\varphi}) = \ln r + j\varphi + j2k\pi \quad (k = \text{entero}) \tag{B.43}$$

## DESARROLLOS EN SERIE

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f"(a)\frac{1}{2!}(x-a)^2 + \ldots \\ &\quad + f^{(n-1)}(a)\frac{(x^{(n-1)} - a)}{(n-1)!} \end{aligned} \tag{B.44}$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \ldots \tag{B.45}$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \ldots \tag{B.46}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \ldots \qquad (-1 < x \leq 1) \tag{B.47}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \ldots \qquad (-1 < x < 1) \tag{B.48}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots. \tag{B.49}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \ldots \tag{B.50}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots \tag{B.51}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \ldots \tag{B.52}$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \tag{B.53}$$

$$\cosh x = x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^3 + \cdots \tag{B.54}$$

## VECTORES EN FORMA COMPLEJA

- Parte real $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ de un vector en forma compleja

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},\, t) = \Re[\mathbf{A}(\mathbf{r},\, t)e^{j\omega t}] \tag{B.55}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\, t) = \mathbf{A}_r(\mathbf{r},\, t) + j\mathbf{A}_i(\mathbf{r},\, t) \tag{B.56}$$

$$\Re(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*) \tag{B.57}$$

$$\Re(\mathbf{A}e^{j\omega t})\,\Re(\mathbf{B}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}e^{j\omega t} + (\mathbf{A}e^{j\omega t})^*)\,((\mathbf{B}e^{j\omega t} + (\mathbf{B}e^{j\omega t})^*) \tag{B.58}$$

$$\Re(\mathbf{A}e^{j\omega t})\,\Re(\mathbf{B}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^* + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}e^{2j\omega t}) \tag{B.59}$$

- Valor medio de un producto de vectores en forma compleja

$$< \Re(\mathbf{A}e^{j\omega t})\,\Re(\mathbf{B}e^{j\omega t}) > = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) \tag{B.60}$$

Apéndice C

# RELACIONES MATEMÁTICAS II

## RELACIONES VECTORIALES

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \tag{C.1}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}; \quad m\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B} \tag{C.2}$$

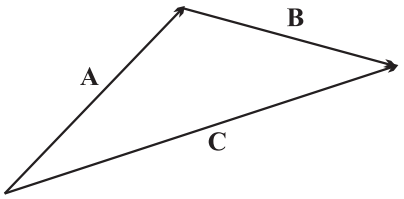



Figura C.1. Composición de vectores.

### *Componentes de un vector*

Vectores unitarios $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{u}_1 + A_2\mathbf{u}_2 + A_3\mathbf{u}_3 \tag{C.3}$$

### *Producto escalar*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\alpha \qquad (\alpha = \text{ángulo que forman } \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B}) \tag{C.4}$$

Si $\mathbf{A} = A_1\mathbf{u}_1 + A_2\mathbf{u}_2 + A_3\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{B} = B_1\mathbf{u}_1 + B_2\mathbf{u}_2 + B_3\mathbf{u}_3$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1\,B_1 + A_2\,B_2 + A_3\,B_3 \tag{C.5}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}; \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \tag{C.6}$$

### *Producto vectorial*

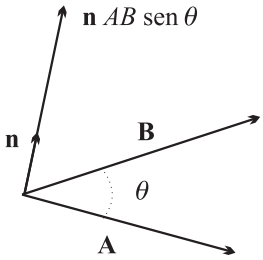



Figura C.2. Producto vectorial.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{n}AB \text{ sen}\,\alpha \tag{C.7}$$

$| \mathbf{A} \times \mathbf{B} |$ = área del paralelogramos cuyos lados son $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ , y $\alpha$ el ángulo que forman.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{C.8}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \;\; ; \;\; \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \tag{C.9}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{C.10}$$

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ = al volumen del paralelepípedo de lados $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{C.11}$$

## ELEMENTOS DE LONGITUD Y VOLUMEN

### *Coordenadas cartesianas o rectangulares*

$$dl = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2} \tag{C.12}$$

$$dv = dx\ dy\ dz \tag{C.13}$$

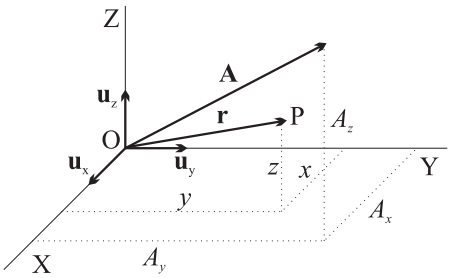



Figura C.3. Coordenadas cartesianas: elemento de longitud.

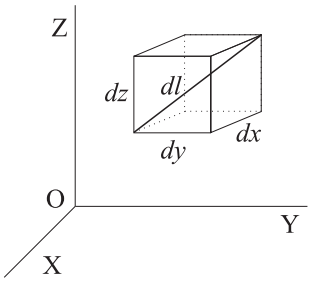



Figura C.4. Coordenadas cartesianas: elemento de volumen.

## *Coordenadas cilíndricas*

$$dl = (d\rho^2 + (\rho\, d\varphi)^2 + dz^2)^{1/2} \tag{C.14}$$

$$dv = d\rho\, \rho d\varphi\ dz \tag{C.15}$$

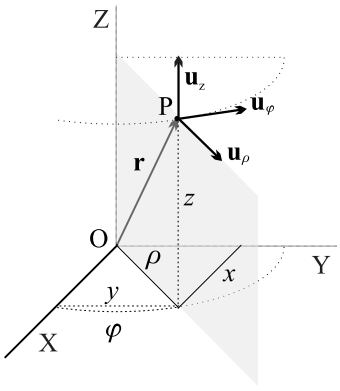



Figura C.5. Coordenadas cilíndricas: elemento de longitud.

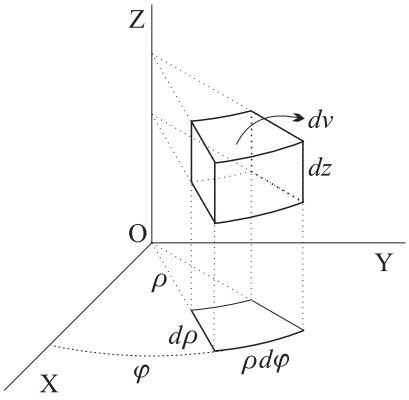



Figura C.6. Coordenadas cilíndricas: elemento de volumen.

### *Coordenadas esféricas*

$$dl = \left(dr^2 + (r\,d\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta d\varphi)^2\right)^{1/2} \tag{C.16}$$

$$dv = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \tag{C.17}$$

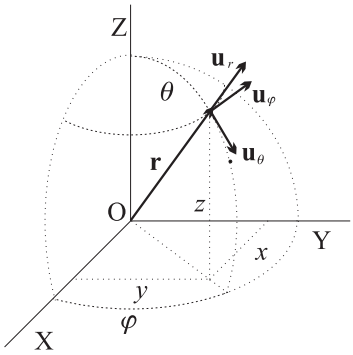



Figura C.7. Coordenadas esféricas: elemento de longitud.

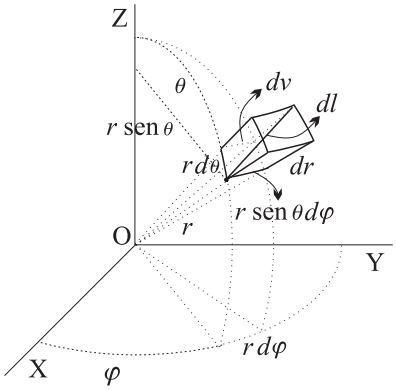



Figura C.8. Coordenadas esféricas: elemento de volumen.

## TRASFORMACIÓN DE COMPONENTES

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}; \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

### *Cartesianas a cilíndricas*

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_x \cos\varphi + A_y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ A_\varphi &= -A_x\,\mathrm{sen}\,\varphi + A_y \cos\varphi \\ A_z &= A_z \end{aligned} \tag{C.18}$$

***Cartesianas a esféricas***

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + A_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + A_z\cos\theta \\ A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - A_z\operatorname{sen}\theta \\ A_\varphi &= -A_x\operatorname{sen}\varphi + A_y\cos\varphi \end{aligned} \tag{C.19}$$

***Cilíndricas a cartesianas***

$$\begin{aligned} A_x &= A_\rho\cos\varphi - A_\varphi\operatorname{sen}\varphi \\ A_y &= A_\rho\operatorname{sen}\varphi + A_\varphi\cos\varphi \\ A_z &= A_{\ z} \end{aligned} \tag{C.20}$$

Coordenadas del vector de posición $(x, y, z)$

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\operatorname{sen}\varphi; \quad z = z \tag{C.21}$$

***Esféricas a cartesianas***

$$\begin{aligned} A_{\ x} &= A_r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\operatorname{sen}\varphi \\ A_{\ y} &= A_r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + A_\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + A_\varphi\cos\varphi \\ A_{\ z} &= A_r\cos\theta - A_\theta\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{C.22}$$

Coordenadas del vector de posición $(x, y, z)$

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi; \quad y = r\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi; \quad z = r\cos\theta \tag{C.23}$$

## DERIVACIÓN DE VECTORES

***Derivada de un vector y sus propiedades***

$$\frac{d\,\mathbf{A}}{d\,x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{A}(x+\Delta x) - \mathbf{A}(x)}{\Delta x} \tag{C.24}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{dx} = \frac{d\mathbf{A}}{dx} + \frac{d\mathbf{B}}{dx} \tag{C.25}$$

$$\frac{d\Phi\mathbf{A}}{dx} = \mathbf{A}\,\frac{d\Phi}{dx} + \Phi\frac{d\mathbf{A}}{dx} \tag{C.26}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{dx} = \frac{d\mathbf{A}}{dx}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dx} \tag{C.27}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{dx} = \frac{d\mathbf{A}}{dx}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dx} \tag{C.28}$$

Si $\mathbf{A}(x) = A(x)\,\mathbf{n}(x)$; $\quad \mathbf{n}(x) = \frac{\mathbf{A}}{A}$

$$\frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} = \mathbf{n}(x)\,\frac{d\,A(x)}{dx} + A(x)\,\frac{d\mathbf{n}(x)}{dx} \tag{C.29}$$

En coordenadas cartesianas $\mathbf{A}(x) = A_x(x)\mathbf{u}_x + A_y(x)\mathbf{u}_y + A_z(x)\mathbf{u}_z$

$$\frac{d\mathbf{A}(x)}{dx} = \mathbf{u}_x\frac{dA_x(x)}{dx} + \mathbf{u}_y\frac{dA_y(x)}{dx} + \mathbf{u}_z\frac{dA_z(x)}{dx} \tag{C.30}$$

**Derivada de los vectores unitaros**

***Coordenadas cilíndricas***

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\rho &= \mathbf{u}_x\cos\varphi + \mathbf{u}_y\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \mathbf{u}_\varphi &= -\mathbf{u}_x\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathbf{u}_y\cos\varphi \\ \mathbf{u}_z &= \mathbf{u}_z \end{aligned} \tag{C.31}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial\,\mathbf{u}_\rho}{\partial\,\rho} = 0 \;\;;\;\; \frac{\partial\,\mathbf{u}_\rho}{\partial\,\varphi} = \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial\,\mathbf{u}_\varphi}{\partial\,\rho} = 0 \;\;;\;\; \frac{\partial\,\mathbf{u}_\varphi}{\partial\,\varphi} = -\mathbf{u}_\rho \\ \frac{\partial\,\mathbf{u}_z}{\partial\,\rho} = 0 \;\;;\;\; \frac{\partial\,\mathbf{u}_z}{\partial\,\varphi} = 0 \;\;;\;\; \frac{\partial\,\mathbf{u}_z}{\partial\,z} = 0 \end{gathered} \tag{C.32}$$

*Coordenadas esféricas*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \mathbf{u}_x \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \mathbf{u}_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{u}_z \cos\theta \\ \mathbf{u}_\theta &= \mathbf{u}_x \cos\theta\cos\varphi + \mathbf{u}_y \cos\theta \operatorname{sen}\varphi - \mathbf{u}_z \operatorname{sen}\theta \\ \mathbf{u}_\varphi &= -\mathbf{u}_x \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{u}_y \cos\varphi \end{aligned} \tag{C.33}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} = \mathbf{u}_\theta \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{u}_\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial r} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \theta} = -\,\mathbf{u}_r \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \varphi} = \mathbf{u}_\varphi \cos\theta \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial r} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi} = -(\mathbf{u}_x \cos\varphi + \mathbf{u}_y \operatorname{sen}\varphi) \end{gathered} \tag{C.34}$$

**Fórmulas de análisis vectorial**

$$\nabla(f+\phi) = \nabla f + \nabla\phi \tag{C.35}$$

$$\nabla(f\,\phi) = \phi\nabla f + f\,\nabla\phi \tag{C.36}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{C.37}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \tag{C.38}$$

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\mathbf{A} \tag{C.39}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \tag{C.40}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \tag{C.41}$$

$$\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi\times\mathbf{A} + \phi\nabla\times\mathbf{A} \tag{C.42}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{C.43}$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{C.44}$$

$$\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi \tag{C.45}$$

$$\nabla\times\nabla\phi = 0 \tag{C.46}$$

$$\int_V \nabla\phi\, dv = \oint_S \phi ds \tag{C.47}$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{(Teorema de la divergencia)} \tag{C.48}$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{A}\, ds \tag{C.49}$$

$$\int_V \mathbf{n} \times \nabla\phi\, dv = \oint_C \phi dl \tag{C.50}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(Teorema de Stokes)} \tag{C.51}$$

### *Coordenadas cartesianas*

$$\nabla\phi = \frac{\partial\,\phi}{\partial\, x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial\,\phi}{\partial\, y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial\,\phi}{\partial\, z}\mathbf{u}_z \tag{C.52}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial\, A_x}{\partial\, x} + \frac{\partial\, A_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, A_z}{\partial\, z} \tag{C.53}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times\ \mathbf{A} = &\left(\frac{\partial A_z}{\partial\, y} - \frac{\partial A_y}{\partial\, z}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial\, z} - \frac{\partial A_z}{\partial\, x}\right)\mathbf{u}_y \\ &+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial\, z} - \frac{\partial A_z}{\partial\, x}\right)\mathbf{u}_z\end{aligned} \tag{C.54}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\, y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\, z^2} \tag{C.55}$$

### *Coordenadas cilíndricas*

$$\nabla\phi = \frac{\partial\,\phi}{\partial\rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{\partial\,\phi}{\rho\,\partial\,\varphi}\,\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial\,\phi}{\partial z}\,\mathbf{u}_z \tag{C.56}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\,\rho}(\rho\, A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\,\varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial\, z}\,A_z \tag{C.57}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = &\mathbf{u}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \\ &+ \mathbf{u}_z\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\end{aligned} \tag{C.58}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\,\rho}\left(\rho\frac{\partial\,\phi}{\partial\,\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\,\varphi^2}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial\,z^2} \tag{C.59}$$

***Coordenadas esféricas***

$$\nabla\phi = \frac{\partial\,\phi}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{\partial\,\phi}{r\,\partial\theta}\,\mathbf{u}_\theta + \frac{\partial\,\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta\partial\,\varphi}\,\mathbf{u}_\varphi \tag{C.60}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\,r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\ \theta}\frac{\partial}{\partial\,\theta}(A_\theta\,\mathrm{sen}\ \theta) + \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\ \theta}\frac{\partial}{\partial\,\varphi}A_\varphi\right) \tag{C.61}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{A} = {} & \frac{\mathbf{u}_r}{r\ \mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) + \\ & \frac{\mathbf{u}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{\mathbf{u}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\end{aligned} \tag{C.62}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi = {} & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\,r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial\,r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \\ & + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{C.63}$$

## DELTA DE DIRAC

Se define $\delta(\mathbf{r})$ de la forma siguiente:

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \text{ para } \mathbf{r}\neq 0, \text{ y } \int\delta(\mathbf{r}')dv' = 1 \tag{C.64}$$

La integral se extiende a todo el espacio.

***Propiedades de la delta de Dirac***

Dada una función $f(\mathbf{r})$,

$$\int f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}')dv' = f(0) \tag{C.65}$$

$$\int f(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_o)dv' = f(\mathbf{r}_o) \tag{C.66}$$

### *Aplicaciones*

**Carga puntual** Expresión de una carga puntual situada en el punto $\mathbf{r}_o$,

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \tag{C.67}$$

**Divergencia del campo eléctrico**

$$\nabla\cdot\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) = \frac{q}{\varepsilon_o}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{C.68}$$

**Laplaciana**

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{C.69}$$

Apéndice D

# TABLAS

## CONSTANTES

| CONSTANTES FÍSICAS | | |
|---|---|---|
| **Nombre** | **Símbolo** | |
| Velocidad de la luz | $c$ | $2{,}998\times10^{8}$ m/s |
| Carga del electrón | $e$ | $1{,}602\times10^{-19}$ C |
| Masa del electrón | $m_e \;\; m$ | $9{,}109\times10^{-31}$ kg |
| Razón carga/masa ($e/m_e$) | $e/m_e$ | $1{,}76\times10^{11}$ C/kg |
| Masa del neutrón | $m_n$ | $1{,}675\times10^{-27}$ kg |
| Masa del protón | $m_p$ | $1{,}672\times10^{-27}$ kg |
| Constante de Plank | $h$ | $6{,}626\times10^{-34}$ J·s |
| Permitividad del vacío | $\varepsilon_o$ | $8{,}854\times10^{-12}$ F/m |
| Permeabilidad del vacío | $\mu_o$ | $4\pi\times10^{-7}$ H/m |
| Constante de Boltzmann | $k$ | $1{,}380\times10^{-23}$ J/K |
| Constante de los gases | $R$ | 8,314 J/mol K |
| Constante de Avogadro | $N_o$ | $6{,}023\times10^{-23}$ mol$^{-1}$ |
| Equivalente mecánico calor | $J$ | 4,186 J/caloría |
| Constante de gravitación | $G$ | $6{,}67\times10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2$/Kg$^2$ |
| Energía en reposo del $e$ | $m_e c^2$ | 0,5110 MeV |
| Energía en reposo del $p$ | $m_p c^2$ | 938,3 MeV |
| Energía equivalente a 1 uma | $uma$ | $1{,}66\times10^{-27}$ kg = 931,5 MeV |
| Momento magnético del $e$ | $\mu_e$ | $9{,}273\times10^{-24}$ J $\cdot$ T$^{-1}$ |
| Radio de Bohr | $a$ | $0{,}5292\times10^{-10}$ m |
| Radio básico del $e$ | $r_e$ | $2{,}818\times10^{-15}$ m |

| UNIDADES | | |
|---|---|---|
| **Magnitud física** | **Unidad S I** | **Unidad S. Gauss CGS** |
| Longitud ($l$) | metro (m) | cm $= 10^{-2}$ m |
| Masa ($m$) | kilogramo (kg) | gramo (g)=$10^{-3}$ kg |
| Tiempo ($t$) | segundo (s) | segundo |
| Frecuencia ($f$) | herz (Hz) = c/s | ciclos/s (c/s) |
| Periodo ( $T$) | $1/f = s$ | |
| Fuerza (**F**) | newton(N)=kg·m/s$^2$ | dina = $10^{-5}$ N |
| Energía ($W$) | julio (J) = N· m | ergio = $10^{-7}$ J |
| Potencia ($P$) | vatio (W) = J/s | erg/seg = $10^{-7}$ W |
| Carga eléctrica ( $Q, q$) | culombio (C) | statculombio =$\frac{1}{3}10^{-9}$ C |
| Momento dipolar (**p**) | C·m (q·l) | |
| Polarización (**P**) | p/vol = C/m$^2$ | |
| Potencial eléctrico( $V$) | voltio (V) = J/C | statvolt = 299,8 V |
| F.e.m. ($\mathcal{E}$) o ($\mathcal{V}$) | voltio (V) = J/C | |
| Int. campo eléctrico (**E**) | V/m; N/C | |
| Desplazamiento eléc.(**D**) | Q/m$^2$ = C/m$^2$ | |
| Capacidad ($C$) | faradio (F) = C/V | $9\times10^{11}$ cm |
| Permitividad ($\varepsilon$) | capac./m = F/m | |
| Corriente eléctrica($I, i$) | amperio (A) = C/s | abamperio = 10 A |
| Densidad de corriente (**J**) | A/m$^2$ | |
| Resistencia elec. ($R$) | V/I = V/A = $\Omega$ | |
| Conductividad ($\gamma, \sigma$) | mho/m = 1/($\Omega$ m) | |
| Inducción magnética (**B**) | Tesla(T) = Wb/m$^2$ | gauss(G) = $10^{-4}$ T |
| Int. de camp. magn. (**H**) | A/m | $4\pi \times 10^{-3}$ Oersted(Oe) |
| Flujo magnético ($\Phi$) | Weber (WB) | $10^8$ Maxwells (Mx) |
| Momento dipo. mag.(**m**) | A m$^2$ | |
| Imanación (**M**) | m/m$^3$ = A/m | |
| Inductancia ($L$) | henrio = (H) | |
| F.m.m. ( $\mathcal{F}$) | Amperio-vuelta | 1,257 Gilbert(Gb) |
| Permeabilidad ($\mu$) | Induc./m = H/m | |
| Reluctancia ($\mathcal{R}$) | f.m.m./Wb = H$^{-1}$ | |
| Potencial vector (**A**) | $\Phi$/m = Wb/m | |
| Vector de Poynting (**S**) | P/área = W/m$^2$ | |
| Longitud de onda ($\lambda$) | m | |
| Impedancia ($Z$) | V/I = $\Omega$ | |
| Admitancia ($Y$) | $1/Z = \Omega^{-1}$=Siemen(S) | |

## Equivalencias

| | | |
|---|---|---|
| Electrón voltio (eV) | 1 eV | $= 1{,}602 \times 10^{-19}$ J |
| Angström | 1 Å | $= 10^{-10}$ m |
| Pulgada | 1 pulg. | $= 2{,}5401$ cm |
| Caloría | 1 cal. | $= 4{,}184$ J |
| Grados | $\theta\,^o$C | $= (273{,}15 + \theta)$ K |
| Kilovatio hora | 1 kW h | $= 3{,}6 \times 10^6$ J |

## RESISTIVIDAD, PERMITIVIDAD Y PERMEABILIDAD

| **Material** | **Resitividad** $(\rho)(\eta)(\Omega\,\mathrm{m})$ | **Permitividad relativa** $(\varepsilon_r)$ | **Permeabilidad relativa** $(\mu_r)$ |
|---|---|---|---|
| Aire | | 1,0006 | |
| Acetato de celulosa | | 7 | |
| Agua(destilada) | $10^4$ | 81 | |
| Arena seca | | 3,4 | |
| Aluminio | $2{,}83 \times 10^{-8}$ | | 1,00002 (Para) |
| Ambar | $5 \times 10^{14}$ | 3 | |
| Azufre | $10^{15}$ | 4 | |
| Baquelita | $10^{14}$ | 5 | |
| Bismuto | | | 0,999983(Dia) |
| Cobalto | | | 250 (Ferro.) |
| Cobre | $1{,}69 \times 10^{-8}$ | | 0,999991 (Dia.) |
| Constantan (Cu 60, Ni 40) | $44{,}0 \times 10^{-8}$ | | |
| Cuarzo(fund.) | $7{,}5 \times 10^{17}$ | 5 | |
| Ebonita | $10^{13}$ a $10^{16}$ | | |
| Germanio (puro) | 0,45 | | |
| Glicerina | | 50 | |
| Hierro ($0^o$C) | $8{,}85 \times 10^{-8}$ | | 5000 (Ferro.) |
| Madera | $10^8$ a $10^{11}$ | 2,1 | |
| Mercurio | $95{,}8 \times 10^{-8}$ | | |
| Mica | $10^{11}$ a $10^{15}$ | 6 | |
| Mumetal | | | 100.000 (Ferro.) |
| Nicromo | $100 \times 10^{-8}$ | | |
| Níquel | $7{,}24 \times 10^{-8}$ | | 600 (Ferro.) |

| **Material** | **Resitividad** $(\rho)(\eta)(\Omega\,\mathrm{m})$ | **Permitividad relativa** $(\varepsilon_r)$ | **Permeabilidad relativa** $(\mu_r)$ |
|---|---|---|---|
| Nitrato de celulosa | | 5 | |
| Oro | $2{,}44 \times 10^{-8}$ | | |
| Parafina | $10^{15}$ | 2,1 | |
| Petroleo | $10^{14}$ | 2,2 | |
| Plata ($0^oC$) | $1{,}47 \times 10^{-8}$ | | 0,99998 (Dia.) |
| Polietileno | $10^{15}$ | 2,2 | |
| Polivinilo | $10^{15}$ | 3,2 | |
| Resina epoxi | $10^{5}$ | 3,7 | |
| Silicio(puro) | 640,0 | | |
| Soluc.Sat. NaCl | 0,044 | | |
| Supermalloy | | | 800.000 (Ferro.) |
| Teflon | $10^{15}$ | 2,1 | |
| Tungsteno(Wolframio) | $5{,}51 \times 10^{-8}$ | | |
| Vidrio | $10^{10}$ a $10^{14}$ | 6 | |

## POTENCIAS DE DIEZ

| **Potencia** | **Prefijo** | **Abreviatura** |
|---|---|---|
| $10^{12}$ | Tera | T |
| $10^{9}$ | Giga | G |
| $10^{6}$ | Mega | M |
| $10^{3}$ | kilo | k |
| $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{-15}$ | femto | f |

# BIBLIOGRAFÍA


[1] López Rodríguez, V. *Electromagnetismo I* Editorial UNED. Madrid (2012).

[2] Cheng, K.D. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería.* Addison-Wesley Iberoamericana. Buenos Aires (1997).

[3] Cheng, K.D. *Field and Wave Electromagnetic,* $2^a$ Ed. Addison-Wesley. Reading, Massachusetts (1989).

[4] Durney, C.H. and Johnson, C. C. MacGraw Hill. New York (1969).

[5] Feynman, R. P., Leighton, R. B. y Sands, M. *Fisica* Vol. II. Fondo Educativo Interamericano. Bogota (1972).

[6] Griffiths, D.J. *Introduction to Electrodynamics.* Prentice Hall. New Jersey (1989).

[7] Hertz, H. R. *Las ondas electromagnéticas.* Ed. Univ. Aut. Barcelona. Barcelona (1990).

[8] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics.* $3^a$ Ed. John Wiley & Sons. Inc. New York (1999).

[9] Kraus, J. D. *Electromagnetismo.* $3^a$ Ed. McGraw-Hill (1986).

[10] López Rodríguez, V. *Problemas resueltos de electromagnetismo.* CERA. Madrid (1998).

[11] Lorrain, P. y Corson, D.R. *Electromagnetism.* W. H. Freeman & Co. New York (1979).

[12] Lorrain, P. y Corson, D.R. *Campos y ondas electromagnéticos.* Selecciones Científicas. $2^a$ Ed. Madrid (1977).

[13] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. V. 8, *Electrodynamic of Continous Media.* $2^a$ Ed. Pergamon Press. Oxford (1984).

[14] Maxwell, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Dover Pub. Inc. New York (1954).

[15] Murray R. Spiegel y L. Abellanas. *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada.* Mc Graw Hill (1991).

[16] Nayfeh, m. H. and Brussel, M. K. *Electricity and Magnetism.* John Wiley & Son. New York (1985).

[17] Panofsky, W. H. H. and Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism.* $2^a$ Ed. Addison Wesley Pub. Co. London (1977).

[18] Plonsey, R. and Collin, E. *Principles and Applications of Electromagntic Fields.* MacGraw Hil Book Co. New York (1961).

[19] Popovic, B.D. *Intoductory Engineering Electromagnetics.* Addison -Wesley Pub. Co. London (1971).

[20] Portis, A. M. *Campos electromagnéticos.* Ed. Reverté S. A. Barcelona (1985).

[21] Purcell, E. M. *Electricidad y Magnetismo.* $2^a$ Ed. Reverté S. A. Barcelona (1992).

[22] Rosser, W.G.V. *Classical Electromagnetism.* Butterworths. London (1968).

[23] Reitz, J. R., Milford, F. J. y Christy, R. W. *Fundamentos de Teoría Electromagnética.* $4^a$ Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. EE UU (1996).

[24] Sanchez Quesada, F, Sanchez Soto, L, Sancho Ruiz, M. y Santamaría Sanchez-Barriga, J. *Fundamentos de electromagnetismo.* Ed. Síntesis. Madrid (2000).

[25] Ticker, R. A. R. *The Contributions of Faraday and Maxwell to Electrical Science.* Pergamon Press, London (1966).

[26] Wangsness, R. K. *Campos Electromagnéticos.* Limusa . Mexico (1987)

[27] Whittaker, E. *A History of the Teories of Aether and Electricity.* Thomas Nelson and Son Ltd. London (1962).

UNED Editorial

Juan del Rosal, 14
28040 MADRID
Tel. Dirección Editorial: 913 987 521